Unidades de aprendizaje autónomo

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

Aurelio Nuño Mayer
Secretario de Educación Pública

Joel Guerrero Juárez
Director General del Consejo Nacional de Fomento Educativo

Lilia Dalila López Salmorán
Directora de Educación Comunitaria e Inclusión Social

Olaya Hetzel Hernández Lugo
Directora de Educación Inicial

Alejandro Tuirán Gutiérrez
Director de Planeación y Evaluación

Norberto Sánchez Romero
Director de Delegaciones y Concertación con el Sector Público

Juan Martín Martínez Becerra
Director de Comunicación y Cultura

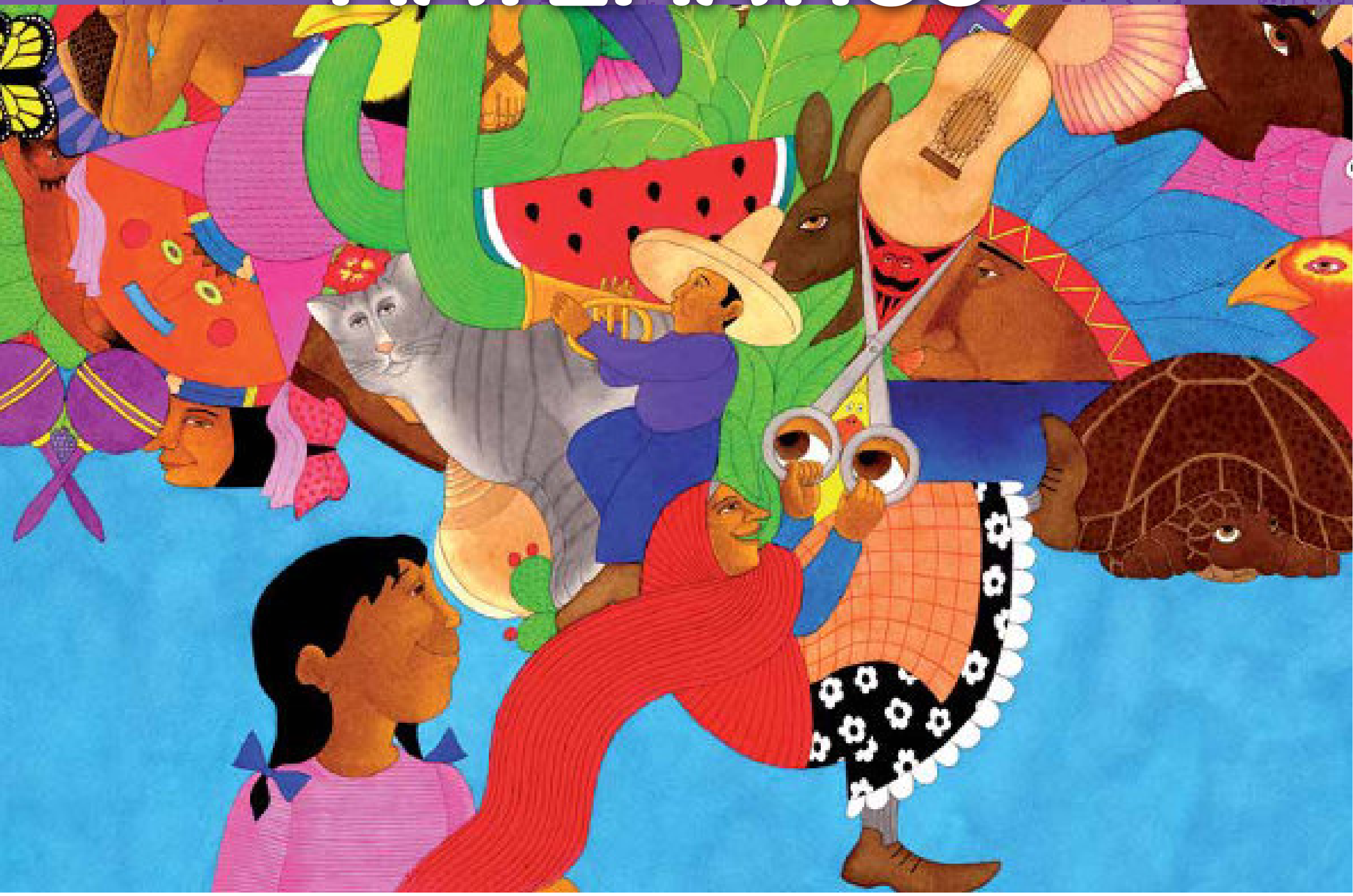
Enrique Torres Rivera
Director de Administración y Finanzas

Susana Encarnación Cortés
Directora de Asuntos Jurídicos

Alejandro Ávila Villanueva
Titular del Órgano Interno de Control

Unidades de aprendizaje autónomo

PENSAMIENTO MATEMÁTICO



MÉXICO
GOBIERNO DE LA REPÚBLICA

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

conafe
Consejo Nacional de Fomento Educativo

LEGAL

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Edición
Consejo Nacional de Fomento Educativo

Compilación
Iván Cabrera Delgado
Araceli Castillo Macías
Alfonso González López
Efraín Pérez Farelas
Verónica Silva Mosqueda
Guillermina Valderrábano Bravo
Mirna Vázquez Martínez
María del Rosario Zúñiga Galván

Ilustración
Laura Almeida
Felicity Rainnie
© Shutterstock.com
Javier Velázquez

Ilustración de portada y lomo
Claudia de Teresa

Fotografía
Alfredo Jacob
© Shutterstock.com

Diseño
Renato Horacio Flores González

Diseño de portada
Cynthia Valdespino Sierra

Coordinación académica
Lilia Dalila López Salmorán
Araceli Castillo Macías

Primera edición: 2016

ISBN de obra completa: en trámite
ISBN: : en trámite

Impreso en México

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos la participación de las siguientes personas por su colaboración y apoyo en la compilación de estos materiales.

A Lawrence Morales por permitirnos reproducir el texto "Early Mathematical Development" (*History of Mathematics for Liberal Arts* by Lawrence Morales CC-BY-NC-SA) en la unidad de aprendizaje "Las losetas. Números enteros". A Janis Herbert por su aportación a la unidad "Lo equitativo, lo justo y el cambio en matemáticas. Proporcionalidad y funciones" con el texto de la página 126 (excerpted from *Leonardo da Vinci for Kids* by Janis Herbert. Copyright © 1998 by Janis Herbert. Reprinted by permission of Chicago Review Press). A Isabel García y Aron Lesser, becarios del Programa Princeton in Latinoamérica por su apoyo en la selección y revisión de los textos en inglés incluidos en este material. Y también un agradecimiento especial para los equipos técnicos que, con sus aportaciones como participantes de la comunidad de aprendizaje, ayudaron al enriquecimiento y mejora de este material. Finalmente, a Isabel García y Aron Lesser, becarios del programa Princeton in Latin America por su apoyo en la selección y revisión de los textos en inglés incluidos en este material.

Bienvenida

Estimadas y estimados estudiantes:

El Consejo Nacional de Fomento Educativo elaboró este material para apoyar el estudio que realizas de los temas referidos a los campos formativos, durante tu paso por la educación básica.

Cada unidad está relacionada con un tema articulador. Con la realización de las actividades propuestas vas a adquirir los conocimientos, habilidades o destrezas referidas a dicho tema. Paulatinamente irás logrando un mayor dominio y un aprendizaje más profundo, para lo cual será fundamental el apoyo que te brinde el Líder para la Educación Comunitaria (LEC), así como la colaboración y el diálogo que establezcas con tus compañeros de grupo, tanto con aquellos que han adquirido con anticipación esos aprendizajes como con los que apenas empiezan el estudio del tema. Por esta razón le hemos llamado a este modelo Aprendizaje Basado en la Colaboración y el Diálogo (ABCD).

Confiamos en que este material te será de mucha utilidad. Procura mantenerlo en buen estado, ya que es tu guía para toda la educación básica. Te deseamos que disfrutes mucho cada uno de los aprendizajes que obtengas y los compartas con los integrantes de tu familia y de tu comunidad.

Consejo Nacional de Fomento Educativo

Presentación

El Conafe pone en tus manos la colección de Unidades de Aprendizaje Autónomo, destinada a favorecer el aprendizaje de estudiantes, padres de familia y comunidad en general, así como de todos los que colaboramos en el Conafe.

Para que logres el aprendizaje deseado en los distintos temas es importante que atiendas los momentos y desafíos que se te proponen, de acuerdo con los siguientes apartados:

PARA INICIAR

Es la primera sesión de las unidades, su finalidad es la reflexión sobre tu interés y tus expectativas acerca del estudio del tema.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

En este apartado encontrarás una introducción al tema a partir de preguntas de reflexión que te ayudarán a relacionar los contenidos con tus experiencias de vida.

PROPÓSITOS GENERALES Y ESPECÍFICOS

En esta sesión se establecen las metas que se plantea alcanzar en el estudio de la unidad, cada propósito específico corresponde a un nivel de profundidad en el estudio.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En cada unidad se proponen desafíos y enfrentar ciertos retos, como analizar textos literarios, científicos, históricos y matemáticos. Algunos textos están escritos en inglés, otros más en alguna lengua indígena, todos te serán de ayuda para que te ejercites en el proceso de aprender por cuenta propia.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Después de que trabajes cada desafío es importante que reflexiones y discutas con tu tutor los principales aprendizajes obtenidos. En todo momento, pero sobre todo en este, será muy importante que registres lo que has aprendido y lo que se te ha dificultado.

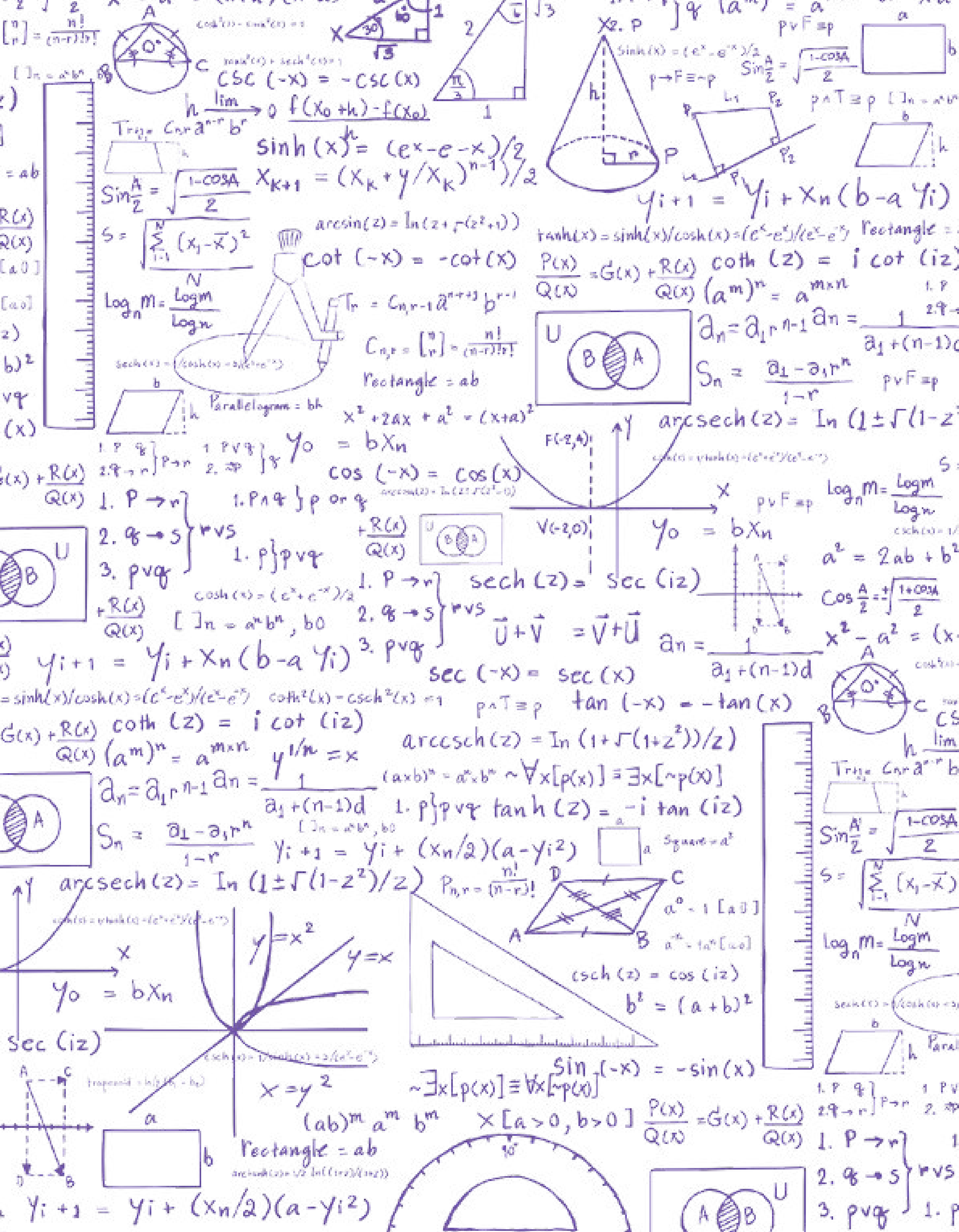
REVISA TU AVANCE

En este apartado, encontrarás el trayecto de aprendizajes que se espera lograr con el estudio, identifica tus avances y tus retos.

PARA SEGUIR APRENDIENDO

En esta sesión encontrarás la bibliografía de otros materiales donde puedes encontrar más información del tema.

Esperamos que todas las Unidades de Aprendizaje Autónomo sean de tu agrado y te permitan aprender y compartir, haciendo así posible que ¨Donde está el Conafe todos aprendemos¨.

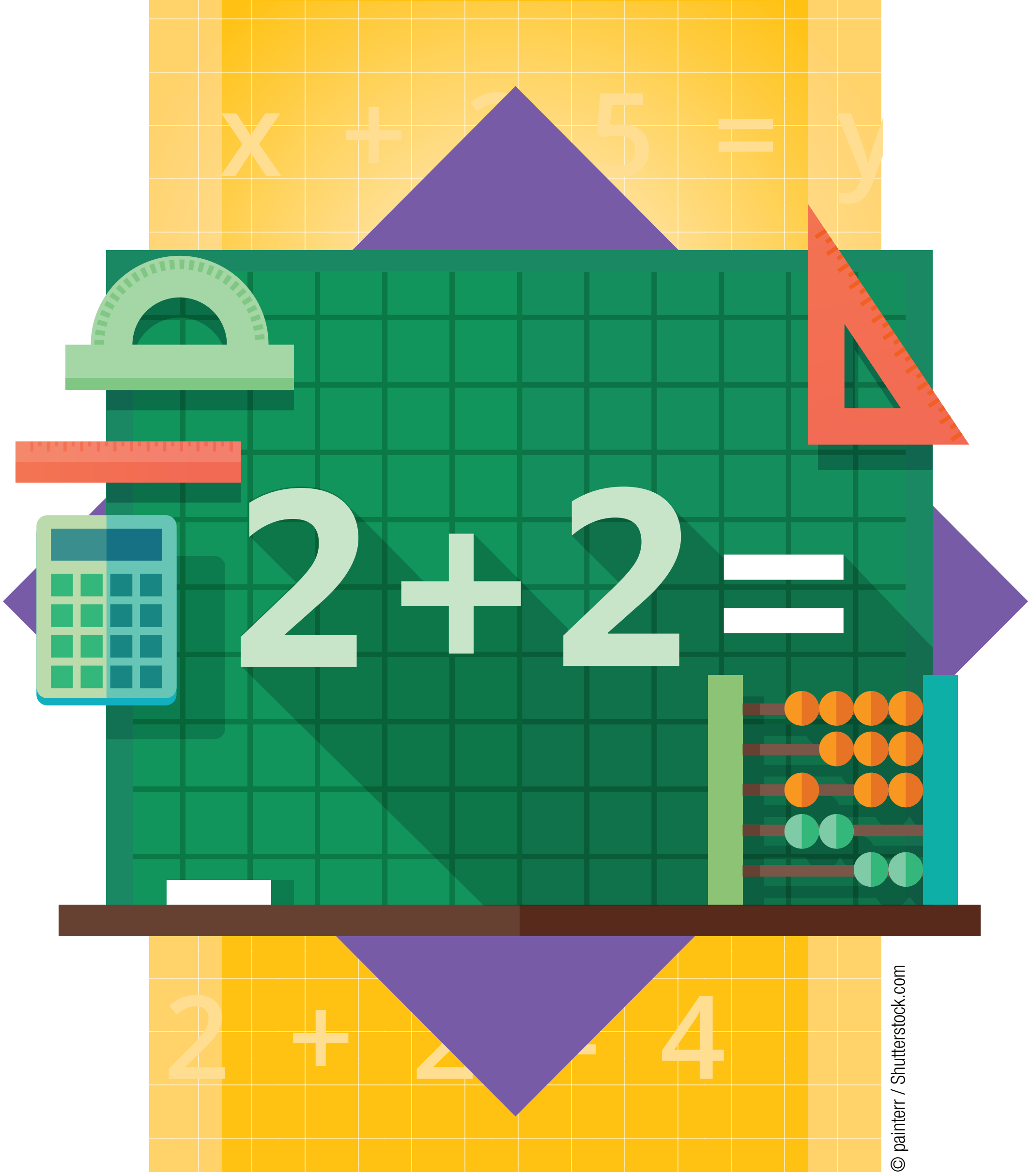


CSC (-x) = -CSC (x)
sinh (x) = (e^x - e^-x)/2
X_K+1 = (X_K + y/X_K)^n-1)/2
Sin A/2 = √(1-COSA / 2)
arcsin(z) = ln(z + √(z²+1))
cot (-x) = -cot (x)
Log_n m = Log m / Log n
rectangle = ab
Parallelogram = bh
x² + 2ax + a² = (x+a)²
y_0 = bX_n
cos (-x) = cos (x)
yi+1 = yi + Xn(b - a yi)
tanh(x) = sinh(x)/cosh(x)
P(x)/Q(x) = G(x) + R(x)/Q(x)
coth (z) = i cot (iz)
(a^m)^n = a^m×n
a_n = a_1 r^n-1
S_n = (a_1 - a_1 r^n)/(1 - r)
arcsech(z) = ln (1 ± √(1-z²)/z)
sech (z) = sec (iz)
U + V = V + U
a_n = 1 / (a_1 + (n-1)d)
sec (-x) = sec (x)
tan (-x) = -tan (x)
p∧T ≡ p
p∨F ≡ p
arccsch(z) = ln (1 + √(1+z²))/z
y^1/n = x
~∀x[p(x)] ≡ ∃x[~p(x)]
tanh (z) = -i tan (iz)
yi+1 = yi + (xn/2)(a - yi²)
csch (z) = cos (iz)
b² = (a + b)²
y = x²
y = x
x = y²
sin (-x) = -sin (x)
~∃x[p(x)] ≡ ∀x[~p(x)]
(ab)^m a^m b^m
x [a > 0, b > 0]
1. P → r
2. q → s
3. p∨q
r∨s
Cos A/2 = ±√(1+COSA / 2)
a² = 2ab + b²

ÍNDICE

MENÚ TEMÁTICO

CAMPO FORMATIVO	DIMENSIÓN CURRICULAR	TEMAS	UNIDADES DE APRENDIZAJE	EJES TRANSVERSALES		
Pensamiento matemático	**Sentido numérico y pensamiento algebraico**	Números enteros	Las losetas	**Ámbito de Estudio: Expresión oral y producción de textos**	**Interculturalidad**	**Ciudadanía**
		Números racionales	La pastelería			
		Patrones y progresiones	De la regularidad a la generalización			
		Ecuaciones	El lenguaje del álgebra			
	Forma, espacio y medida	Formas geométricas	Más que figuras planas			
		Ubicación espacial	Como grandes exploradores			
		Medida	Y solo es comparar…			
	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lo equitativo, lo justo y el cambio en matemáticas			
		Análisis y presentación de datos	Analicemos el dato			
		Nociones de probabilidad	Águila o sol			



LAS LOSETAS

NÚMEROS ENTEROS

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

¿Sabías que los números enteros están más cerca de ti de lo que te imaginas? En la cantidad de sopa que hacen en tu casa para comer, la distancia que hay entre tu casa y la escuela o en tu fecha de cumpleaños, las matemáticas están ahí. En ocasiones, solo nos hace falta hacer un alto en nuestras actividades para descubrirlas.

En esta unidad de aprendizaje encontrarás que los números enteros, además de estar presentes en nuestra vida diaria, nos sirven para resolver diferentes problemáticas. Para ello, muchas veces es necesario realizar operaciones con los números enteros y cada persona tiene formas diferentes de realizarlas; aquí conocerás que existen otras formas igualmente útiles y que son convencionales. Te invitamos al estudio profundo de los números enteros con la seguridad de que no tienes nada que perder y sí mucho que aprender.

Como puedes observar en el siguiente esquema, en el estudio del tema trabajaremos los conceptos básicos del número, el conteo y las operaciones básicas que nos permitirán enfrentarnos a diversos problemas:

SISTEMA NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

- Número.
  - Números con signo.
  - Principios de conteo.
  - Tipos y formas de números (naturales, enteros ordinales y cardinales).
- Sistema de numeración decimal.
  - La base diez.
  - Valor posicional.
  - Otros sistemas de numeración.
- Operaciones con números.
  - Procedimientos no convencionales.
    - Adición Sustracción.
    - Multiplicación División.
    - Potenciación Radicación.
  - Procedimientos convencionales.

PROPÓSITO GENERAL

Conoceremos a los números enteros y las diferentes formas de operarlos y usarlos para resolver situaciones de la vida diaria, tanto dentro como fuera de la escuela.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Analizaremos situaciones diversas que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos para la resolución de problemas, así como distintas formas de sumar y restar números naturales.
- Conoceremos el funcionamiento de las cuatro operaciones básicas para resolver problemas, así como la relación que hay entre aritmética y geometría.
- Resolveremos problemas que impliquen el uso y operación de los números enteros, utilizando diversas estrategias de solución.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Es importante que pongas atención en la información que te da el siguiente desafío, lo que te pide y cómo se relacionan estos elementos, para construir tu estrategia de solución.

Se quiere cubrir un espacio de suelo rectangular de 450 cm de largo y 360 cm de ancho con losetas cuadradas de igual medida. ¿Cuál es el menor número de losetas que se necesitan para cubrir el piso? No se vale cortar losetas.

Si no se pidiera como condición usar el menor número de losetas:

a. ¿Cuántas soluciones tendría el problema?
b. ¿Cuáles serían las dimensiones de las losetas en cada solución?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra tu estrategia de solución y tus reflexiones respecto a qué son los números, qué formas encontraste de operarlos, cómo se ayudan mutuamente la geometría y la aritmética; así como en qué situaciones utilizarías esos aprendizajes dentro y fuera de la escuela.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el siguiente desafío descubrirás cómo se comportan los números con signo, es decir, los números negativos y los positivos. Es importante que centres tu atención en qué significa que un número tenga signo positivo o que tenga signo negativo.

En la siguiente tabla se muestran las temperaturas mínimas y máximas extremas y la temperatura promedio alcanzadas en enero de 2015 en 6 entidades de la República Mexicana.[1]

ENTIDAD	TEMPERATURA MÍNIMA EXTREMA**	TEMPERATURA MÁXIMA EXTREMA**	TEMPERATURA MÍNIMA PROMEDIO	TEMPERATURA MÁXIMA PROMEDIO	TEMPERATURA PROMEDIO
Guerrero	3	40*	17*	31*	24*
Querétaro	1	33	8*	22*	15
Sonora	-10	36*	8*	24*	16*
Tlaxcala	-3	26*	3*	21*	12*
Veracruz	-7	34*	12*	22*	17*
Yucatán	6	36	17*	29*	23*

* Datos redondeados con fines de trabajo con números enteros.
** Las temperaturas extremas corresponden a las alcanzadas en el mes de enero de 2015 en lugares y días específicos, diferentes para cada temperatura en cada entidad.

¿En cuál de las 6 entidades la temperatura mínima extrema fue más significativa?

¿En cuál de las 6 entidades la temperatura máxima extrema fue más significativa?

¿Qué entidad presentó mayor amplitud térmica en el mes de enero de 2015?

[1] Comisión Nacional del Agua, Reporte del clima en México. Enero 2015, http://smn1.conagua.gob.mx/climatologia/analisis/reporte/RC-Junio15.pdf (Fecha de consulta: 29 de marzo de 2016).

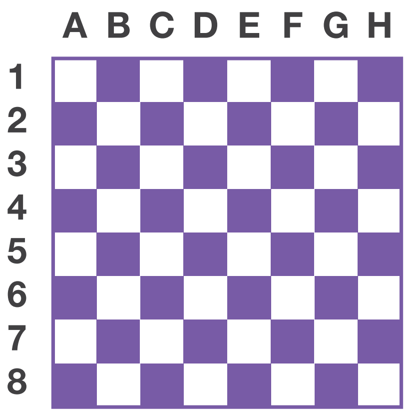
ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

No olvides registrar tu estrategia de solución y tus reflexiones respecto a qué son los números con signo y cómo se operan.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Con el siguiente desafío conocerás la operación llamada potenciación. Es importante que identifiques cómo se operan los números enteros con la potenciación.

Observa el siguiente tablero. Si colocaras una moneda de $1 en la primera casilla, 2 en la segunda, 4 en la tercera y, así sucesivamente, colocar en cada casilla el doble de la anterior, hasta llegar a la última. ¿Cuántas monedas de $1 tendrías en la última casilla?



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro con tus aprendizajes respecto a la potenciación de los números enteros.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el siguiente desafío conocerás la operación llamada radicación. Observa y reflexiona respecto a qué relación tiene la radicación con la potenciación.

En un terreno cuadrado de 16,384 m^2 se van a plantar naranjos, utilizando el trazado de cuadro. Si la distancia que debe existir entre cada árbol por hilera y la distancia entre hileras es de 8 metros, ¿cuántos naranjos se pueden sembrar en el terreno?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

No olvides continuar con tu registro de aprendizaje, considerando tus reflexiones respecto a la radicación y las dificultades que se te presentaron y cómo las fuiste resolviendo.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Con el siguiente texto, descubrirás otros sistemas de numeración que algunas culturas utilizaron a través del tiempo. También identificarás propiedades y características del sistema decimal, lo cual te permitirá nutrir los aprendizajes que adquiriste al resolver los desafíos:

SISTEMAS DE NUMERACIÓN[2]

Los egipcios representan una de las civilizaciones más antiguas y desarrolladas del mundo. Gracias a la existencia de los papiros de Rhind, y de sus múltiples jeroglíficos, es que se sabe algo acerca de su aritmética.

Aunque emplearon el sistema duodecimal en la subdivisión del año (en 12 meses, correspondientes a sus 12 dioses principales) y del día (en 12 horas de

[2] José Manuel Becerra, "Unidad II", en Sistemas de numeración, (Colegio de Matemáticas de la EPN-UNAM), 1-3, http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/pdf/m4unidad02.pdf (Fecha de consulta: 19 de marzo de 2016).

claridad y 12 de tinieblas), su numeración era decimal y contaba con signos jeroglíficos para las cifras del uno al diez y para cien, mil, diez mil, cien mil y un millón.

Los babilonios, al igual que los egipcios, desarrollaron su propio sistema de numeración, ellos escribían sobre tablillas de arcilla, en donde utilizaban la escritura cuneiforme y no tenían ningún símbolo para representar el cero. Utilizaban un sistema de numeración de valor posicional a través de dos símbolos básicos en forma de cuña. Una en forma vertical para las unidades y otra en forma horizontal para las decenas.

Los mayas inventaron un sistema de numeración en donde aparece por primera vez el cero, además de que su base era el 20, ya que se cree que tal vez sea por el hecho de contemplar los dedos de pies y manos. Esta civilización representó cada cantidad por medio de símbolos que según la posición que ocupaban adquiría cierto valor, es decir el sistema maya así como el decimal es un sistema de posiciones. El símbolo del cero en cualquier posición indica ausencia de cantidad.

Los hindúes representaron con nueve símbolos diferentes, uno por cada número del 1 al 9. Estos han cambiado con el tiempo, pero llegaron a Europa en su forma actual en el siglo XVI.

Por su parte, los griegos y los hebreos, utilizaron nueve símbolos diferentes para estos números. En cada caso, los símbolos eran las primeras nueve letras de sus alfabetos.

El Imperio Romano desarrolló un sistema de numeración que se usó en Europa hasta el siglo XVII. En la actualidad es muy conocido y se usa para indicar los tomos de una obra, los capítulos de un libro, el nombre del siglo, el nombre de una época, para las fechas, para los personajes de mismo nombre y las horas en las carátulas de algunos relojes.

SISTEMA DECIMAL

[...] La numeración que se utiliza en la actualidad fue heredada por los árabes, por lo que a sus caracteres los llamamos arábigos. En un principio hubo dos clases de números arábigos: los del Imperio de Oriente y de Occidente de

Europa. En México se emplean los occidentales, que fueron llevados por los moros a España, los números orientales se usan en Turquía, Egipto, Arabia y los países vecinos.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, la numeración egipcia y la romana, empleaban la base 10 pero no usaban el principio de posición. Otras numeraciones como la maya y la babilonia, usaban el principio de posiciones pero no usaban la base 10. En el sistema decimal se usan los dos principios, es decir se utiliza la base 10, además de que las cifras tienen su valor según la posición que estas ocupen.

Al decir que un sistema es de base 10, significa que hace uso de 10 símbolos o guarismos únicamente, es decir, los símbolos de base 10 son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Los dígitos pueden tener dos valores: un valor absoluto que es el que indica el número de unidades que lo forman y un valor relativo que es el que adquieren según la posición que ocupan.

Ejemplo. El valor absoluto de los dígitos que forman 496 es: 4, 9, 6. Por su parte, el valor relativo es 400, 90 y 6. Las cifras que intervienen en un número se dividen en períodos de seis cifras cada uno de la siguiente forma:

TERCER PERIODO *BILLONES*						SEGUNDO PERIODO *MILLONES*						PRIMER PERIODO *UNIDADES*					
SEGUNDO GRUPO *MILES*			PRIMER GRUPO *UNIDADES*			SEGUNDO GRUPO *MILES*			PRIMER GRUPO *UNIDADES*			SEGUNDO GRUPO *MILES*			PRIMER GRUPO *UNIDADES*		
Tercer grupo *centenas.*	Segundo grupo *decenas.*	Primer grupo *unidades.*	Tercer grupo *centenas.*	Segundo grupo *decenas.*	Primer grupo *unidades.*	Tercer grupo *centenas.*	Segundo grupo *decenas.*	Primer grupo *unidades.*	Tercer grupo *centenas.*	Segundo grupo *decenas.*	Primer grupo *unidades.*	Tercer grupo *centenas.*	Segundo grupo *decenas.*	Primer grupo *unidades.*	Tercer grupo *centenas.*	Segundo grupo *decenas.*	Primer grupo *unidades.*

El período de la derecha son las unidades, el siguiente son los millones, el siguiente es el de los billones, etc.

Cada período se puede dividir en dos grupos de tres cifras cada uno: las unidades y los millares, a su vez cada grupo se divide en unidades, decenas y centenas.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Recuerda registrar las reflexiones y conclusiones a las que llegaste con la lectura del texto.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para continuar con el estudio del tema, el siguiente texto te permitirá conocer la forma en que se comportan las operaciones básicas en situaciones ordinarias, lo cual te permitirá integrar lo que has aprendido.

EL PAÍS DE LAS MATEMÁTICAS[3]

Érase una vez un nomio que anhelaba, más que nada en la vida, ir al País de las Matemáticas. Quería trepar por la geometría y deslizarse por largas ecuaciones. Ahí no vivían más que cifras, bellas cifras con las que uno podía hacer toda clase de acrobacias. Desde contarse los dedos de los pies hasta calcular el tiempo que un astronauta tardaría en recorrer la distancia entre la Tierra y la Luna.

El nomio esperó hasta que se desesperó, y una buena mañana, al despertar, se dijo, “Ya no esperaré más. Voy a ir al País de las Matemáticas porque es ahí donde quiero estar.”

Y, sin voltear para atrás, emprendió su camino. Primero, pasó a una mapería, o sea una tienda donde venden mapas para llegar a cualquier parte. Y se compró un mapa para orientarse. Con su mapa en la mano, el nomio se sentía aún más intrépido. Abriéndolo con mucho cuidado, leyó:

Para llegar al país de las matemáticas, haz lo siguiente, sin saltarte ninguna indicación:
Sal de la ciudad siguiendo las flechas grandes.

[3] Consejo Nacional de Fomento Educativo, ***Arte, ciencia y técnica II,*** Colección Colibrí, (México: SEP Subsecretaría de Educación Básica y Normal, 1997), 49-63.

El nomio leyó esto, y levantó la vista. Justamente, en la esquina de enfrente, había una flecha grande y otra chica. Doblando su mapa, el nomio atravesó la calle, y se echó a andar en la dirección que señalaba la flecha grande. Ya fuera de la ciudad, no veía ninguna otra flecha, de manera que volvió a consultar su mapa.

En el campo encontrarás una gran piedra en forma de guajolote. de esa piedra parten un camino recto y otro curvo. toma el camino recto hasta llegar a un corral cerrado. asómate y adentro verás un conjunto de ovejas.

El nomio caminó y, efectivamente, después de un rato llegó a un corral cerrado, en donde estaban varias ovejas.

Del otro lado del camino un poco más adelante hay otro corral, pero abierto. afuera de ese corral, verás otro conjunto de ovejas. mete las ovejas a ese corral abierto y sepáralas por colores.

Al leer aquello, el nomio se sintió algo nervioso. Él no era pastor, y nunca había tratado a ovejas. No sabía a ciencia cierta si no les daba por morder o patear. Pero, armándose de valor, procedió a seguir las instrucciones del mapa.

Realmente, no estaba muy a gusto. Él quería ir al País de las Matemáticas, no cuidar ovejas. ¿Qué tenían que ver las ovejas con las matemáticas?

En fin. Ya había logrado meter las ovejas al corral, y ya estaban separadas por color: las blancas en un rincón y las cafés en otro. ¿Y ahora qué?

Acabas de formar un sub-conjunto café y otro sub-conjunto blanco, leyó en el mapa.

Afuera del corral hay un bote. en él encontrarás unas campanas. ponle una a cada oveja. no debe faltarte ni sobrarte ni una.

El nomio no tardó en encontrar el bote de campanas, y ya con un poco más de confianza, le amarró una campana a cada oveja. Ni le faltaron, ni le sobraron.

Ahora, cruza el camino y ve si en el corral cerrado hay una oveja para cada oveja que hay en el corral abierto.

Afortunadamente, el nomio traía su plumón, y se le ocurrió marcar una oveja del corral abierto y otra del corral cerrado, y otra del corral abierto y otra del corral cerrado, y así hasta terminar con todas...

Pero sobraba una oveja en el corral cerrado, una oveja negra. Un tanto agotado, el pobre nomio se sentó a un lado del camino y abrió una vez más su mapa.

El nomio tuvo que ir a asomarse varias veces a cada corral, para asegurarse de que por cada oveja había puesto una piedrita o una piedrota. Pero, finalmente se sentó frente a sus dos corrales. Estaba satisfecho. Volvió a consultar su mapa.

Saca las piedras de los corrales y frente a cada piedrita pon una piedrota.

Eso era fácil, eso lo podía hacer sentado ahí mismo. Alineó todas sus piedritas y frente a cada una colocó una piedrota, pero sobraba una. "Claro," gritó el nomio. "¡Es la oveja negra!"

Has formado una línea de piedritas y otra línea de piedrotas. cada línea es una cantidad, y cada cantidad tiene su nombre, que es un número. una piedra sola es una. una piedra más otra son dos. dos piedras más otra son tres. tres piedras más otra son cuatro. cuatro piedras más otra son cinco. cinco piedras más otra son seis. seis piedras más otra son siete. siete piedras más otra son ocho. ocho piedras más otra son nueve. y nueve piedras más otra son 10. y así hasta nunca acabar...

Ahora, ponle su número a tu línea de piedritas, y a tu línea de piedrotas.

"¿A ver?", dijo el nomio. "Una piedrita más otra son dos. Dos piedritas más otra son tres..." Tenía nueve piedritas y diez piedrotas.

Ya puedes contar, leyó el nomio en su mapa. *ahora cuenta las ovejas blancas y cuenta las ovejas cafés que están en el corral abierto.*

El nomio alineó cuatro piedritas que eran las ovejas blancas, y abajo de esas alineó otras cinco que eran las ovejas cafés. Eran todas sus piedritas. O sea cuatro mas cinco eran nueve.

Ya puedes sumar. y si entre estas nueve ovejas hay dos que están sucias y las sacas del corral, ¿cuántas te quedan?

“A nueve le quito dos”, dijo el nomio moviendo sus piedritas.
Quedan... ¡siete!

Ya puedes restar. y si esas dos ovejas sucias se enojan porque las sacaste del corral y cada una de ellas te da tres topes, habrás recibido tres topes por dos ovejas, o sea...
¡seis topes!

Ya puedes multiplicar. y si las siete ovejas que quedaron en el corral, les repartes siete bultos de alfalfa, a cada una de las ovejas le tocará...
¡Un bulto!

Ya puedes dividir. Ah, ¡qué bonito!, pensó el nomio mirando al cielo. Las nubes comenzaban a tornarse rosadas. Todo el día se le había ido en caminar y contar ovejas y piedras. Y aún no llegaba al País de las Matemáticas.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro anotando las reflexiones que te deja el texto.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Con el siguiente texto en inglés, conocerás un poco de la historia de las matemáticas, que te permitirá complementar el estudio del tema.

EARLY MATHEMATICAL DEVELOPMENT[4]

In terms of mathematics, influences of imperialism and trade over long distances served as the catalysts of mathematical development.

These were both relatively new to human society at the time and encouraged the establishment of news schools and temple scribes who could record and manage the new collections of information needed to support these endeavors.

However, everyday needs such as religion, commerce, and agriculture were even stronger influences on the development of mathematics.

Grain supplies had to be tracked and distributed among an increasingly large population. Daily business transactions and the use of wills encouraged the creation of numerical tables.

The building of dams, irrigation canals, granaries and other buildings necessitated calculations be made while the religious practices of the time were heavily reliant on having a dependable calendar.

This means keeping careful records of astronomical data.
In the following table, you can see a general breakdown of periods of history in the context of their mathematics.

As the table indicates, the Babylonians had what is called a sexagesimal place system, which means they had a base-60 system.

[4] History of Mathematics for Liberal Arts by Lawrence Morales

PERIOD	MATHEMATICAL DEVELOPMENT
5000–3000BCE	Development of number concepts in prehistoric Middle East
3000–2000BCE	Evolution of the sexagesimal place value system in southern Iraq
2000–1600BCE	Arithmetic in Old Babylonian scribal schools
1600–0BCE	Old Babylonian mathematics

Also, notice that there is an entry in the table dealing with scribal schools.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de aprendizaje integrando los aprendizajes que este texto ofrece.

REVISA TU AVANCE

Al finalizar el estudio de esta unidad, es momento de valorar los aprendizajes logrados y pensar en aquellos que tendríamos que volver a revisar con la finalidad de seguir profundizando en el estudio.

INICIAL	1	Usas diferentes formas de expresión para comunicar, representar, y precisar cantidades que se utilizan en la vida diaria.
BÁSICO	2	Comprendes problemas numéricos que se te plantean, estimas tus resultados y los representas usando dibujos, símbolos y/o números.
	3	Modelas y resuelves problemas aditivos con distinto significado y resultados menores que 100, utilizando los signos +, −, =.
	4	Resuelves problemas aditivos con diferentes significados, modificando el lugar de la incógnita y hasta con números de dos cifras.
INTERMEDIO	5	Resuelves problemas que implican multiplicar mediante diversos procedimientos y comunicas tus estrategias para identificar y extraer información relevante.
	6	Usas diversas estrategias de solución de problemas, como identificar expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas que son equivalentes, para efectuar cálculos descritos explícitamente con números naturales.
	7	Resuelves problemas simples de situaciones complejas que se pueden resolver con una división y utilizas el algoritmo convencional en los casos en que sea necesario.
	8	Resuelves problemas aditivos y multiplicativos con números naturales que implican dos o más transformaciones, analizando diferentes representaciones de una misma situación.
AVANZADO	9	Resuelves problemas aditivos y multiplicativos que implican el uso de números enteros compartiendo tus razonamientos y argumentos.
	10	Usas diferentes formas de expresión para comunicar, representar, y precisar.
	11	Comprendes problemas numéricos que se te plantean, estimas tus resultados y los representas usando dibujos, símbolos y/o números.

PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

Conafe. Arte, ciencia y técnica II. Colección Colibrí, 49-63. México: SEP, Subsecretaría de Educación Básica y Normal, 1997.

Becerra, José Manuel. Sistemas de numeración. Unidad II, Colegio de Matemáticas de la EPN-UNAM. 1-3. http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/pdf/m4unidad02.pdf (Fecha de consulta: 19 de marzo de 2016).

SEP. *Desafíos matemáticos*. Libro para el alumno. 1er grado. México: SEP. Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, 2014.

SEP. *Desafíos matemáticos*. Libro para el alumno. 2do grado. México: SEP. Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, 2014.

SEP. *Desafíos matemáticos*. Libro para el alumno. 3er grado. México: SEP. Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, 2014.

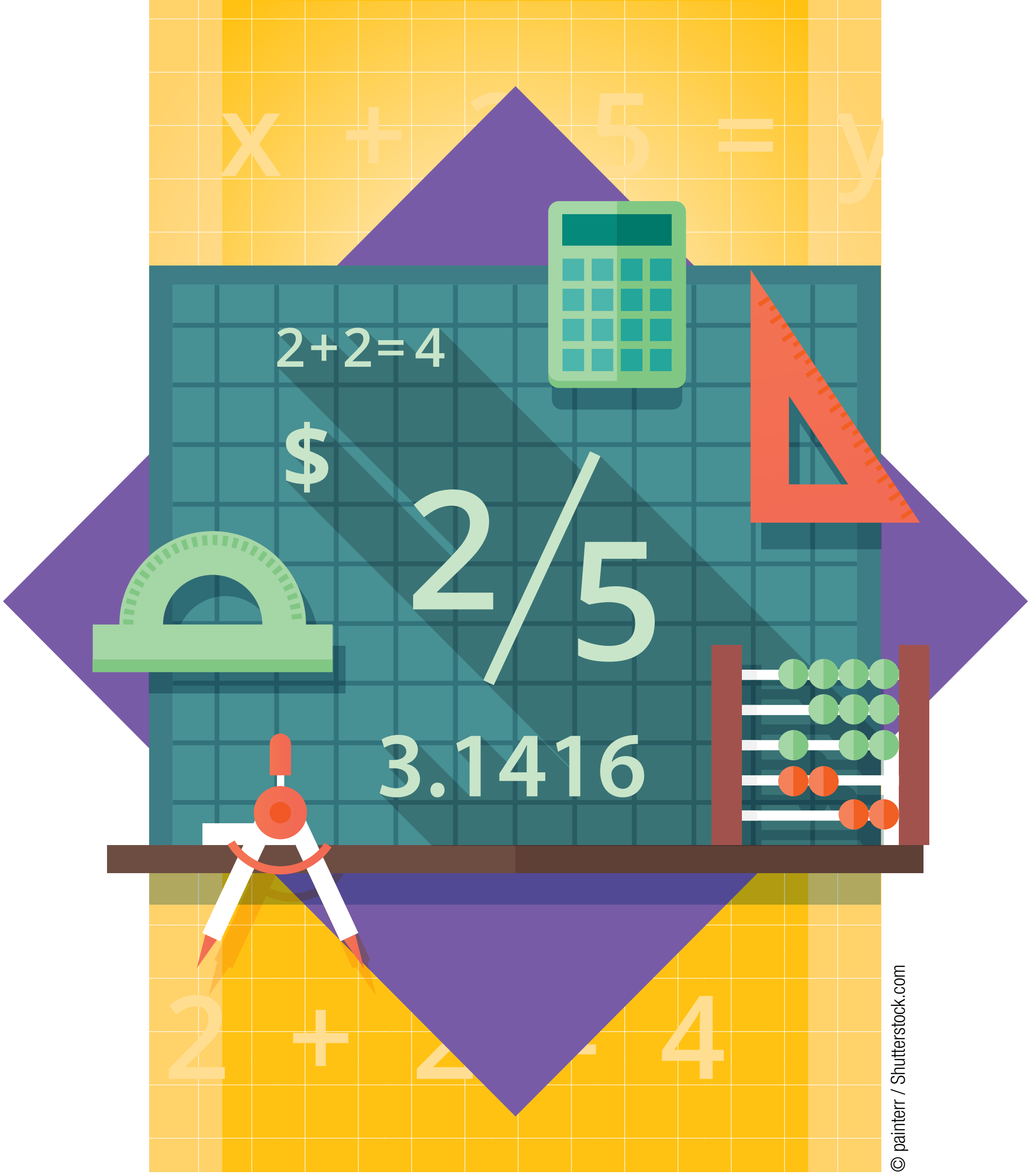
SEP. *Desafíos matemáticos*. Libro para el alumno. 6to grado. México: SEP. Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, 2013.

Morales, Lawrence. Babylonian Mathematics. *History of Math for the Liberal Arts*, Chapter 3, Seattle Central Community College, 5, 2001.

http://www.seattlecentral.edu/sccconline/mat107/chapter03.pdf (Fecha de consulta: 7 de marzo de 2016).

SEP. *Matemáticas I.* Volumen I. Telesecundaria. México: SEP, 2014.

SEP. *Matemáticas I.* Volumen 2. Telesecundaria. México: SEP, 2014.



LA PASTELERÍA

NÚMEROS RACIONALES

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

Los números enteros son muy importantes para contar cualquier cantidad de objetos, sin embargo hay situaciones en las que son insuficientes; por ejemplo, ¿qué harías si quisieras compartir tres chocolates entre siete de tus amigos y quisieras que a todos les tocara la misma cantidad de chocolate?, ¿cómo comunicarías por escrito tu estatura? En la vida cotidiana dentro y fuera de la escuela, ¿has vivido situaciones en las que los números enteros sean insuficientes?

En esta unidad de aprendizaje tendrás la oportunidad de resolver diversos problemas con los que conocerás a las fracciones y a los números fraccionarios y a los decimales, reflexionarás sobre las distintas formas de solución, expresarás tus ideas y podrás compartir tus aprendizajes en el aula, en tu casa y en tu comunidad. A partir de estudiar los principales conceptos, resultados y aspectos de los números fraccionarios y los decimales, es decir, los números racionales:

NÚMEROS RACIONALES

- Números fraccionarios.
  - Conceptualización.
  - Partes de una fracción.
  - Tipos de fracciones.
  - Equivalencia.
  - Representación.
  - Simplificación.
  - Comparación.
  - Ubicación en la recta.
- Números decimales.
  - Conceptualización.
  - Punto decimal.
  - Base y valor posicional.
  - Comparación y equivalencias.
  - Orden [antecesor y sucesor].
  - Conversión de expresiones.
  - Propiedades [densidad, neutralidad del cero].

PROPÓSITO GENERAL

Reconoceremos la aportación de los números racionales en la precisión o mejor aproximación de cantidades para la resolución de problemas en la vida diaria.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Identificaremos, en situaciones de la vida diaria, aquellas cantidades que son parte de un todo, para valorar la aportación de los números racionales en la precisión de mediciones y reparto, y sus representaciones en números fraccionarios y decimales.
- Exploraremos diversas cantidades de uso diario para representarlas con números fraccionarios y números decimales y utilizarlas en la solución de problemas.
- Reconoceremos la necesidad de convertir cantidades en números fraccionarios o decimales para representarlas de acuerdo a la situación y medida que se requiera, así como la relación que hay entre estos números.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el estudio de esta unidad es importante que observes cuándo los enteros ya no son suficientes para resolver una situación, así como la relación entre objetos, cantidades, magnitudes y números que participan en esta. Analiza cómo los números fraccionarios y los decimales ayudan a ser más precisos o tener mejores aproximaciones en situaciones en las que las cantidades no son enteras o en cantidades que al operarse el resultado no es entero.

Te invito a que durante tu avance en el estudio de este tema, reflexiones constantemente respecto a qué son los números fraccionarios y los números decimales y qué relación hay entre ellos. Escribe en tu cuaderno tus primeras ideas y también qué quisieras conocer acerca de ellos.

Doña Isabel abrió su pastelería esta semana. Vende pasteles de 2, 3 o 5 kilos, aunque también los vende por rebanada. A continuación, puedes ver la tabla de precios:

TAMAÑO	PRECIO
2 kilos	99.90 pesos
3 kilos	174.90 pesos
5 kilos	249.90 pesos

Doña Isabel quiere ganar más vendiendo el pastel de 2 kilos por rebanadas, así que quiere saber en cuántas rebanadas, del mismo tamaño, podría partir un pastel para ganar hasta el doble del precio del pastel entero. Ayúdale a calcular diferentes tamaños de rebanadas para que ella elija cuál le conviene más. Considera cuánto pesaría cada rebanada en las opciones que le ofrezcas a doña Isabel.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra las estrategias que utilizaste para ofrecer diferentes opciones a doña Isabel. Para enriquecer la descripción de tu proceso de aprendizaje, puedes considerar preguntas como: ¿Qué información del problema utilizaste?, ¿qué conocimientos de las fracciones, de los números fraccionarios y de los decimales utilizaste?, ¿qué aprendiste?

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Con el siguiente desafío observa la función de las fracciones y la operación de los números fraccionarios y de los decimales. Descubre una aplicación más de estos números en la vida diaria.

Papel de envoltura

Para entregar los pasteles, doña Isabel los envuelve en papel. En los pasteles de 2 kilos ocupa 1/2 metro, en los de 3 kilos utiliza 3/4 metro y en los de 5 kilos ocupa 1 1/3 metros. Si al final de un día vendió 7 pasteles de 2 kilos, 5 pasteles de 3 kilos y 5 de 5 kilos...

1. ¿Cuántos metros de papel utilizó para envolver los pasteles?
2. Si al inicio del día el rollo de papel tenía 50 metros, ¿cuántos metros le quedaron al final del día?
3. ¿Cuánto ganó doña Isabel ese día por la venta de los pasteles enteros?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso de aprendizaje, retoma las preguntas que te recomendamos anteriormente para registrar los conceptos que pusiste en práctica para resolver este desafío.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el siguiente desafío es necesario que observes la función de los números fraccionarios y los decimales.

Para la iluminación de la fiesta de una comunidad se están armando series con alambres de 10 metros. En el primer alambre se colocó un foco a la mitad y otro a un tercio de uno de los extremos. El coordinador de iluminación pidió que se colocaran dos focos más entre los dos primeros de manera que la distancia entre foco y foco sea la misma. ¿Cuál es la distancia entre los focos?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra tus reflexiones respecto a la ubicación de las fracciones en la recta y a la importancia de los números fraccionarios y decimales para la precisión o mejor aproximación de medidas.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto te ofrece información respecto a los números racionales. Es importante que pongas principal atención en la diferencia y las relaciones que hay entre fracciones, números fraccionarios y números decimales.

NÚMEROS DECIMALES Y EXPRESIONES DECIMALES[5]

La notación utilizando el punto es solo una forma de representar las fracciones que surgió con el interés de facilitar los cálculos con ellas. Sin embargo, algunas fracciones son decimales y otras no. Esta precisión, y otras que haremos en seguida, ayudarán a entender mejor que no es lo mismo la notación usando el punto decimal que los números decimales.

1. Los números decimales son aquellos que pueden escribirse en forma de fracciones decimales.
2. Las fracciones decimales son las que pueden expresarse con un numerador entero y un denominador que es una potencia de 10,[6] por ejemplo 3/10 y 1/1000 son fracciones decimales; también son fracciones decimales 1/2 y 3/5, ya que se pueden encontrar fracciones equivalentes a un medio y a tres quintos cuyos denominadores sean alguna potencia de 10.
3. Este tipo de fracciones tienen la particularidad de que pueden representarse de otra manera: utilizando escrituras que llevan punto decimal, dando lugar a las expresiones decimales finitas y que en la escuela simplemente reciben el nombre de decimales. A las fracciones 3/10 y 1/1000 les corresponden, respectivamente, las siguientes escrituras decimales: 0.3 y 0.001.
4. Las fracciones que no son decimales (por ejemplo 1/3) no pueden representarse mediante una expresión decimal finita, este tipo de fracciones da lugar a las expresiones decimales periódicas infinitas (1/3 = 0.3333...).

[5] Alicia Ávila y Silvia García, *Los decimales: más que una escritura* (México: INEE, 2008), 33-34.

[6] Recuérdese que las potencias de 10 son, por ejemplo, 103 = 1000, 102 = 100, 101 = 10, 100 = 1, etcétera.

5. Ambas expresiones, decimales finitas y decimales periódicas, forman el conjunto de los números racionales (números que pueden escribirse como fracciones),[7] que son los que se estudian en la Educación Primaria y Secundaria.

No deben confundirse los números decimales con una de sus representaciones mediante la escritura con punto, que por ser la más práctica es la que más utilizamos.

En el nivel de Educación Primaria y Secundaria sólo se estudian las expresiones decimales que representan números racionales, son la expresiones decimales finitas y expresiones decimales infinitas periódicas. Sin embargo, es necesario insistir en que también hay expresiones decimales que no corresponden a los números racionales y que son aquéllas cuya parte decimal es infinita y no periódica; este tipo de números se llaman irracionales. Es decir, los números irracionales también pueden representarse de manera aproximada mediante una expresión con punto decimal, pero no son números decimales porque no pueden expresarse con una fracción con denominador potencial de 10. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 2 puede expresarse como 1.4142135..., no obstante que lleva un punto decimal, el número no corresponde a ninguna fracción decimal.

El único número irracional que los alumnos usan en su expresión con punto decimal en la primaria y secundaria es el número π. Lo más común es que aproximemos el valor de π con unas cuantas cifras decimales: 3.14 o 3.1416, pero aunque agreguemos más cifras decimales no es posible expresar con punto decimal el valor exacto de π, debido a que, por ser irracional, el número de cifras decimales que tiene es infinito y no periódico; no obstante, para efectos prácticos es suficiente considerar su valor con la aproximación 3.1416.[8]

---

[7] Los números racionales son todos los números que pueden escribirse como fracciones, es decir, como a/b, donde a y b son números enteros y ***b*** debe ser diferente de cero; son números racionales: 2/3, 4/5, 5, 2.1, 0.3333..., etcétera. Nótese que los números decimales son un subconjunto de los racionales.

[8] Los decimales infinitos con periodo, por ejemplo 0.1212121212... sí son racionales. Son irracionales cuando son infinitos y no tienen periodo; otro ejemplo de número irracional es raíz cuadrada de 3, que aproximadamente es 1.7320508075688772935..., la parte decimal continúa de manera infinita y sin periodo. El lector podrá explorar en una calculadora otros números irracionales, como raíz cuadrada de 5, raíz cuadrada de 11, etcétera.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro, reflexiona respecto a qué aportaciones te ofrece el texto para tu estudio de los números racionales.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío debes tomar en cuenta que el metro es la unidad de medida. Reflexiona qué significan las expresiones decimales, como .4 metros.

Un grupo de amigos registró sus estaturas en la arena: Jacinto 1.59m, Karla 1.3 m, Mónica 1.08 m, Daniel 1.279 m, Marcos 0.99 m, Erick 1.30, Alicia 1.6. Ordena a los amigos según sus estaturas.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Anota en tu registro de proceso de aprendizaje: ¿cómo se comparan números decimales en su expresión con punto decimal?

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En este desafío es importante que observes bien los datos del problema y que reflexiones respecto al aporte de la geometría.

En una mitad del huerto escolar se sembraron 2/3 partes de lechugas y el resto de rábanos, en la otra mitad se sembraron 1/4 parte de zanahorias y el resto de espinacas. ¿Qué parte de la huerta está sembrada de rábanos y qué parte está sembrada de espinacas?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra tu proceso de aprendizaje, no olvides anotar tus reflexiones y tus aprendizajes.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el siguiente desafío es importante que identifiques el significado y uso de los números negativos. También te ayudará reflexionar respecto a la temperatura a la que están acostumbrados en cada lugar.

La siguiente tabla muestra las temperaturas mínimas extremas y promedio del mes de enero de 2015.

ESTADO [9]	T. MÍN (°C)	T. MEDIA	ESTADO	T. MÍN (°C)	T. MEDIA
Aguascalientes	-3	13.9	Morelos	1.5	19.9
Baja California	-7	16	Nayarit	9.5	24
Baja California Sur	-2.2	18.9	Nuevo León	-7.2	12.9
Campeche	4.1	23.5	Oaxaca	0.5	21.3
Chihuahua	-13.9	9.9	Puebla	-8.9	14.7
Chiapas	-0.2	21.8	Querétaro	1	14.9
Coahuila	-6.2	11.5	Quintana Roo	10.2	24
Colima	4.8	24.9	Sinaloa	0	20.6
Ciudad de México	3	14.7	San Luis Potosí	-1.4	14.9
Durango	-13.5	11.8	Sonora	-10	16.2
Guerrero	3	23.8	Tabasco	13.5	23
Guanajuato	-0.1	15.4	Tamaulipas	0	14.9
Hidalgo	-5.1	13.2	Tlaxcala	-3	12.3
Jalisco	-2	18	Veracruz	-7	17.1
Estado de México	-5.8	11.8	Yucatán	6	23.4
Michoacán	-3.4	19.1	Zacatecas	-5.4	12.9

- ¿Qué estado alcanzó menor temperatura?
- ¿En cuál de los estados de la República Mexicana, la temperatura mínima extrema fue más relevante?

[9] Comisión Nacional del Agua, “Temperatura”, ***Reporte del clima en México,*** (Año 5, No. 1, 22, enero 2015) Cuadro adaptado con fines educativos

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Describe tu estrategia para contestar las preguntas y tus reflexiones y argumentos respecto al uso de los números racionales.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Te compartimos los siguientes textos donde conocerás otro uso de estos números racionales.

MONEDAS[10]

Foto: © Alberto Tirado.Fat Jackey / Shutterstock.com

[Las denominaciones de monedas (en centavos) que son válidas para realizar pagos son 5c, 10c, 20c y 50c. Además de la unidad ($1 peso) también se fabrican monedas de $2, $5, $10 y $20 pesos. Las monedas en centavos se identifican claramente porque] en la parte central de la moneda, el número [de centavos que vale] como motivo principal y valor facial, a su derecha el símbolo de centavos "¢". "Al anverso y al centro, tienen el Escudo Nacional en relieve escultórico, con la leyenda "ESTADOS UNIDOS MEXICANOS". [En el caso de las monedas a partir de $1 peso, todas son] bimetálicas constituidas por dos aleaciones, una para su parte central y otra para su anillo perimétrico [e indican el número de pesos que vale como motivo principal de la moneda], en

[10] Banco de México, "Monedas," Banco de México, http://www.banxico.org.mx/billetes-y-monedas/informacion-general/billetes-y-monedas-de-fabricacion-actual/billetes-monedas-fabricacion-001.html Texto adaptado para fines educativos, (Fecha de consulta: 25 de febrero de 2016).

la parte central a la izquierda el símbolo "$". [En el caso de las monedas de $5 pesos, también pueden tener bustos, retratos ecuestres o escenas reconocidas de personajes de la Independencia de México o la Revolución mexicana. Para la moneda de $10 pesos, se acuñó una edición especial que tiene] en el primer plano del campo del reverso el retrato del general Ignacio Zaragoza; y, detrás de él, una escena de la lucha entre mexicanos e invasores, con los fuertes de Loreto y Guadalupe al fondo. Esta cara se completa con la leyenda alusiva a la conmemoración "150 ANIVERSARIO DE LA BATALLA DE PUEBLA / 5 DE MAYO" (en dos líneas), los años "1862 y 2012", la denominación $10 en número y la ceca de la Casa de Moneda de México (M°). [Por último, las monedas de $20 pesos son conmemorativas y se han acuñado para conmemorar diversos hechos históricos de nuestro país como:

- Bicentenario Luctuoso del generalísimo José María Morelos y Pavón.
- Centenario de la Fuerza Aérea Mexicana.
- Centenario de la Toma de Zacatecas.
- Centenario de la Gesta Heroica de Veracruz].

DÓLAR ESTADOUNIDENSE[11]

Circulating coins are the coins that the United States Mint produces for everyday transactions. Circulating coins are also included in the United States Mint's annual coin sets, which are the staple of coin collecting".

[The Lincoln Penny] was first issued in 2010 and is emblematic of Lincoln's preservation of the United States as a single and united country. It features a union shield and scroll with the inscription ONE CENT.

Foto: © John R. McNair / Shutterstock.com

[11] United States Mint, "What are Circulating Coins?," United States Mint, https://www.usmint.gov/mint_programs/circulatingCoins/ Texto adaptado para fines educativos (Fecha de consulta: 27 de enero de 2016).

[The five-cent coin] has featured, since 2006, the Thomas Jefferson likeness based on a Rembrandt Peale portrait completed in 1800.

[The dime (ten-cent coin)] first appeared in 1946, soon after the death of President Franklin Roosevelt. The Roosevelt dime was released on the late president's birthday, January 30. The dime is the smallest, thinnest coin in use today.

[The quarter dollar (twenty-five-cent coin)] shows the familiar image of President George Washington.

Kennedy Half-Dollars are circulating quality produced as collectibles, not for everyday transactions. However, they may be still used as legal tender.[18] The current Native American $1 Coin Program launched in 2009 and will be issued, to the extent possible, in the chronological order in which the Native Americans depicted lived or the events recognized occurred.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Reflexiona sobre la información que encontraste en los textos anteriores. ¿Qué diferencias encontraste entre las denominaciones de las monedas utilizadas en Estados Unidos y México?, ¿qué función tienen los números fraccionarios y decimales en el contexto de las monedas? Y continúa tu registro de proceso de aprendizaje.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el siguiente desafío es importante que observes cuál es el entero de referencia y qué sucede con la expansión decimal de los números; es decir, cuando la expansión decimal tiene sentido respecto al contexto.

DENSIDAD DE POBLACIÓN[12]

En México, como en todo el mundo, la distribución de habitantes es desigual: existen regiones donde se concentra mucha gente y otras en las que la población es poca; las ciudades están más densamente pobladas que las comunidades rurales.

La relación entre un espacio determinado y el número de personas que lo habitan se llama densidad de población, la cual se obtiene dividiendo el número de personas que viven en un lugar específico entre el número de kilómetros cuadrados que mide ese territorio.

Por ejemplo, para calcular la densidad de población de México:

$$\frac{\text{Población total} \; (112'336{,}538 \text{ habitantes})}{\text{Extensión territorial del país} \; (1'959{,}248 \text{ km}^2)} = \text{Densidad de población} \; (57 \text{ hab/km}^2)$$

Esto significa que en el 2010, si tuvieras que repartir a los habitantes del país en todo el territorio nacional, habría 57 personas por cada kilómetro cuadrado.

12 Instituto Nacional de Geografía y Estadística, "Densidad de población", (México: Inegi), http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/densidad.aspx?tema=P (Fecha de consulta: 30 de abril del 2016).

CLAVE	ENTIDAD FEDERATIVA	SUPERFICIE KM *	POBLACIÓN TOTAL (2010)[13]
1	Aguascalientes	5,625	1'184,996
2	Baja California	71,546	3'155,070
3	Baja California Sur	73,943	637,026
4	Campeche	57,727	822,441
5	Coahuila de Zaragoza	151,445	2'748,391
6	Colima	5,627	650,555
7	Chiapas	73,681	4'796,580
8	Chihuahua	247,487	3'406,465
9	Distrito Federal(a)	1,484	8'851,080
10	Durango	123,367	1'632,934
11	Guanajuato	30,621	5'486,372
12	Guerrero	63,618	3'388,768
13	Hidalgo	20,856	2'665,018
14	Jalisco	78,630	7'350,682
15	Estado de México	22,333	15'175,862
16	Michoacán de Ocampo	58,667	4'351,037
17	Morelos	4,892	1'777,227
18	Nayarit	27,862	1'084,979
19	Nuevo León	64,203	4'653,458
20	Oaxaca	93,343	3'801,962
21	Puebla	34,251	5'779,829
22	Querétaro Arteaga	11,658	1'827,937
23	Quintana Roo	42,535(b)(c)	1'325,578
24	San Luis Potosí	61,165	2'585,518
25	Sinaloa	57,331	2'767,761
26	Sonora	179,516	2'662,480
27	Tabasco	24,747	2'238,603
28	Tamaulipas	80,148	3'268,554
29	Tlaxcala	3,997	1'169,936
30	Veracruz de Ignacio de la Llave	71,856	7'643,194
31	Yucatán	39,671	1'955,577
32	Zacatecas	75,416	1'490,668
	República Mexicana	**1'959,248(d)**	**112'336,538**

(a) El Distrito Federal está constituido por Delegaciones.
(b) No incluye la superficie de la isla Cozumel, la cual es de 498 km^2.
(c) No incluye la superficie de Isla Mujeres, la cual es de 5 km^2.
(d) Considera solo la parte continental.
Fuente: *(1)INEGI. Marco Geoestadístico 2005.

1. Tomando en cuenta los datos de la Tabla y el estado en el que vives, calcula: ¿Cuál es su densidad de población?, Compara con la entidad que tiene mayor densidad de población y con la que tiene menor densidad de población.
2. Calcula la densidad de población de tu comunidad.

[13] Instituto Nacional de Geografía y Estadística, Censo de Población y Vivienda 2010, (México: Inegi), http://cuentame.inegi.org.mx/impresion/poblacion/densidad.asp (Fecha de consulta: 30 de abril de 2016)

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso de aprendizaje de los números racionales, anota tus reflexiones respecto a qué significa la expresión decimal en el contexto de las poblaciones.

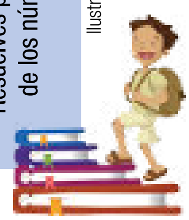
REVISA TU AVANCE

Al finalizar el estudio, te invitamos a revisar el listado de los aprendizajes que obtuviste al término de la unidad. Con ello podrás hacer una valoración de tus avances. Compara tus aprendizajes con el trayecto de aprendizajes del tema que te presentamos a continuación, con la finalidad de que tengas mayor precisión de tu avance e identifiques cuáles aprendizajes te faltan.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Construyes objetos. Elaboras patrones, categorías y clasificaciones. Usas diferentes lenguajes como formas de expresión para comunicar y representar tus experiencias.	Identificas cantidades que son partes de un todo mediante el uso de estrategias de reparto. Comunicas tus resultados usando dibujos, símbolos o números.	Identificas información relevante en tablas sencillas para resolver problemas que involucran la relación de partes de un entero con su expresión fraccionaria.	Utilizas estrategias de conteo para resolver problemas de reparto, representando gráficamente tus resultados.	Resuelves problemas que involucran la suma y resta de fracciones con igual denominador.	Construyes fracciones equivalentes y reconoces su importancia en la operación de números fraccionarios y en su ubicación en la recta numérica.	Identificas en la solución de problemas el aporte y significado de la expresión decimal de los números racionales.	Comprendes y usas en la solución de problemas la relación entre expresiones fraccionarias y expresiones decimales de los números racionales.	Conceptualizas a los números racionales con signo en diversas situaciones de la vida cotidiana dentro y fuera de la escuela.	Explicas los procesos convencionales para operar números racionales, comunicando de diversas formas tus razonamientos.	Resuelves problemas que involucran el uso, operación y significación de los números racionales; formulando conclusiones, argumentos y explicaciones precisas.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo



PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

Ávila Alicia y Silvia García. *Los decimales: más que una escritura*. México: INEE, 2008.

CONAGUA. “Temperatura”, *Reporte del clima en México*. Año 5, No. 1. México: En Conagua, 2015.

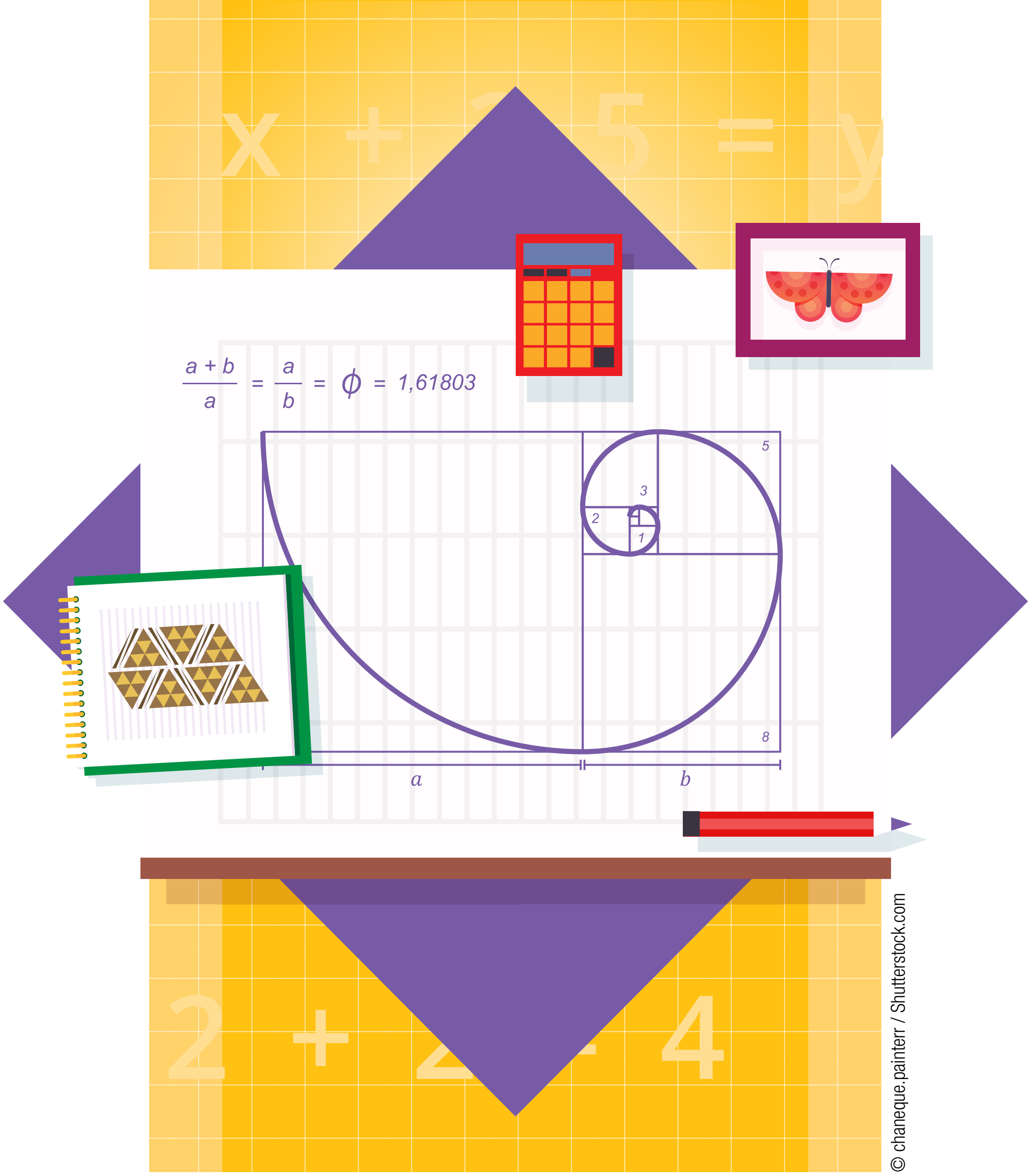
BANXICO. Monedas. Banco de México, http://www.banxico.org.mx/billetes-y-monedas/informacion-general/billetes-y-monedas-de-fabricacion-actual/billetes-monedas-fabricacion-001.html, 2016.

US MINT. *What are Circulating Coins?* United States Mint. https://www.usmint.gov/mint_programs/circulatingCoins/, 2016.

INEGI. Densidad de población. México: Inegi. http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/densidad.aspx?tema=P, 2016.

Conafe. *Manual del Instructor Comunitario Nivel III.* Serie Dialogar y Descubrir. México: Conafe, 2012.

Conafe. *Matemáticas. Cuaderno de trabajo Nivel III.* Serie Dialogar y Descubrir. México: Conafe, 2012.



DE LA REGULARIDAD A LA GENERALIZACIÓN

PATRONES Y PROGRESIONES

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

¿Te has dado cuenta de que muchos de los fenómenos que suceden a tu alrededor siguen ciertos patrones? Por ejemplo, la velocidad que un objeto alcanza en caída libre en un tiempo determinado, el crecimiento de los seres vivos por año, la reproducción de bacterias, o el crecimiento de una deuda adquirida con intereses. Si observas bien a tu alrededor podrás descubrir patrones en las formas de las plantas, en las casas, en la música. Pues en esta Unidad de Aprendizaje vamos a revisar conjuntos ordenados de formas o números, con la finalidad de analizar cómo determinar cualquier elemento de estos y cómo construirlos, tomando en cuenta lo siguiente:

SISTEMA NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Patrones y progresiones.

- Regularidades de secuencias.
- Sucesiones.
  - Progresión aritmética.
  - Progresión geométrica.
  - Progresión espacial.
  - Series aritméticas.
  - Series geométricas.
  - Teselaciones.
  - Regla general y de recurrencia.
  - Fractales.
  - Expresiones algebraicas.
  - Término general.

PROPÓSITO GENERAL

Desarrollaremos, mediante el análisis de conjuntos ordenados, estrategias que nos permitan estudiar, representar y predecir fenómenos que ocurren en el tiempo de forma intermitente.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Identificaremos regularidades en los elementos de conjuntos numéricos y de formas geométricas para encontrar otros elementos.
- Identificaremos, mediante el estudio de problemas en contexto, la regularidad de sucesiones con método descriptivo recurrente, con progresiones aritmética y geométrica para determinar los siguientes elementos de la sucesión.
- Aprenderemos a observar, registrar y analizar el comportamiento de algunos fenómenos naturales y sociales para predecir o calcular su comportamiento en el tiempo. Utilizaremos expresiones algebraicas lineales o cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión, progresión o serie.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para este desafío es importante que observes cuidadosamente cada una de las imágenes y que identifiques qué formas se repiten.

Analiza las imágenes y describe sus características.

Ilustración: Felicity Rainnie

Foto: Alfredo Jacob

Ilustración: Laura Almeida

Foto: Alfredo Jacob

© Diyana Dimitrova / Shutterstock.com

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Anota en tu registro tus reflexiones y lo que entiendes por patrones a partir de tu análisis de las imágenes.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el estudio de esta unidad de aprendizaje debes poner atención en cómo se comportan los elementos de cada sucesión, si crecen o disminuyen, si tienen un comportamiento los elementos de cada sucesión y si es posible determinar las expresiones algebraicas que ayuden a construir el término general.

Leticia vende dulces en la terminal de camiones. Observa la cantidad de dulces que vendió durante cuatro días. ¿Cuántos dulces venderá Leticia los días 5, 9 y 37 si continúa incrementando la venta de la misma manera?

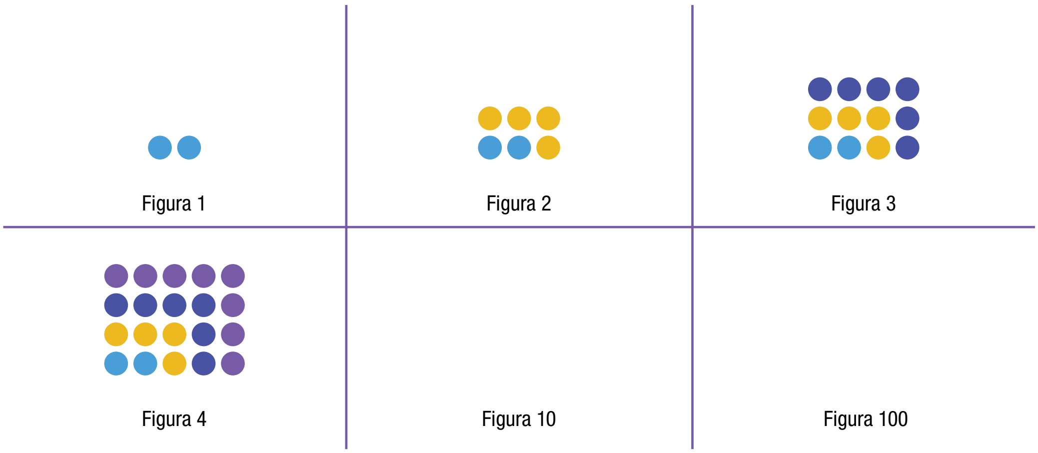
DÍA 1	DÍA 2	DÍA 3	DÍA 4	DÍA 5	DÍA 9	DÍA 37
7	14	21	28			

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Describe en tu registro cómo resolviste el problema y anota tus reflexiones respecto a las características de las sucesiones.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Erick está acomodando sus canicas, de manera que formen un rectángulo como se muestra en la tabla. Determina la cantidad de canicas que tiene Erick si llegó hasta la figura 10, ¿cuántas canicas necesitaría para formar la figura 100?



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Recuerda registrar en tu cuaderno todo el proceso que sigas para resolver el problema. Puedes guiarte con preguntas como:

- ¿Qué características o propiedades de las sucesiones utilizaste para encontrar el número de canicas de la figura 6?
- ¿Cuál es el patrón que siguen los términos de la sucesión?
- ¿Cómo determinaste la expresión para el enésimo término de la sucesión?

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el siguiente desafío analiza la regla de construcción y realiza el triángulo en tu cuaderno, observa cómo crece el número de triángulos sin colorear y ve haciendo tus anotaciones.

Triángulo de Sierpinski. Partiendo de un triángulo, se unen con segmentos de rectas los puntos medios de sus lados y se obtienen 4 triángulos semejantes al inicial. Colorea los triángulos de las orillas. Realiza la misma operación con los 3 triángulos restantes (como se muestra en la imagen). ¿Cuántos triángulos negros tendrá el triángulo después de aplicar 10 veces la misma operación?

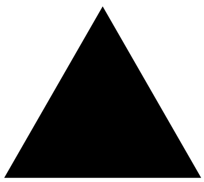


Figura 1

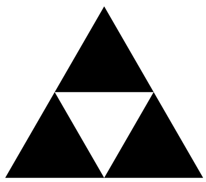


Figura 2

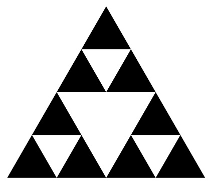


Figura 3

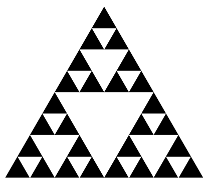


Figura 4

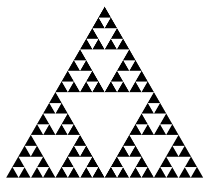


Figura 5

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Puedes construir un fractal utilizando el triángulo que quieras o cualquier otra figura geométrica.

Continúa tu registro anotando tus reflexiones y aprendizajes, así como la manera como construiste.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el siguiente desafío observa la regla de construcción y registra las regularidades que este acomodo de números presenta.

Observa cómo se construye el triángulo de Pascal.
Describe, por lo menos, tres progresiones que existen en él.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra tus descubrimientos y reflexiones al analizar el triángulo de Pascal.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío es necesario analizar la regla general de construcción dada por la expresión algebraica.

Teniendo como base la expresión $-3n2+6$ desarrolla la secuencia numérica.

LUGAR 1	LUGAR 2	LUGAR 3	LUGAR 4	LUGAR 23

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra tus aprendizajes y reflexiona respecto a qué es una expresión algebraica y cuál es su función.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto te servirá para conocer más sobre las sucesiones matemáticas y clarificar qué es el n-ésimo término en una sucesión.

SUCESIONES[14]

Las sucesiones son tan antiguas como los números naturales en la evolución y desarrollo de la Matemática. Así por ejemplo la ordenación de los días del año, la ordenación de los hermanos de una familia del mayor al menor.

Los pitagóricos, grandes apasionados a los números naturales, debieron ser los primeros en interesarse en la construcción de sucesiones infinitas. Consideraron, en particular, sucesiones de números originados jugando con piedras (cálculos), al colocarlas en forma de polígonos; de esta manera fueron construyendo sucesiones de números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.

Galileo Galilei observó y apuntó el espacio que, cada segundo, recorre una bola al caer por un plano inclinado.

En la práctica, en el llenado de una piscina se registra el nivel del agua cada hora y se consigue una sucesión de números. Los pitagóricos, consideraron pares de números que se obtenían por cociente, estos aproximándose por defecto o por exceso alternativamente, constituyendo esto el primer ejemplo por recurrencia y del límite para la Matemática Infinitesimal.

[14] EcuRed, “Sucesiones numéricas”, Ecured, s.f. http://www.ecured.cu/Sucesiones_num%C3%A9ricas (Fecha de consulta: 16 de marzo de 2016).

Un conjunto cuyos elementos están numerados, esto es, puestos en correspondencia simple (biunívoca uno a uno) con los números naturales, de modo que en el conjunto hay un primer elemento, un segundo, un tercero, etc.

Sirven para estudiar, representar y predecir los fenómenos que ocurren en el tiempo de forma intermitente.

Por ejemplo: si se comienza a registrar las temperaturas máximas de cada día, se podrá prever el comportamiento de la temperatura en días sucesivos.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso de aprendizaje describiendo los aportes del texto a tus reflexiones y aprendizajes del tema.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En los siguientes desafíos analiza los datos que te proporciona el problema y registra el comportamiento de los fenómenos en el tiempo.

Un obrero comienza a trabajar con un salario de $2,300.00 al mes durante el primer año, con el convenio de que recibirá un aumento anual de $92.00. ¿Cuál será su sueldo al cabo de 15 años de servicio?

Una persona solicitó un préstamo de $15,000.00, por el cual tiene que pagar el 1.4% de interés mensual sobre la deuda acumulada (es decir, los intereses se van sumando a la deuda y sobre los nuevos montos se calcula el interés). Si la persona no hace ningún pago en un año, ¿cuál será el monto de la deuda al cabo de un año?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

No olvides registrar tus aprendizajes.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En la lectura encontrarás algunos ejemplos de cómo se han utilizado algunas sucesiones famosas en la vida diaria. La secuencia de Fibonacci se aplica para comprender el orden de muchos fenómenos naturales como en los girasoles o los huracanes.

FIBONACCI SEQUENCE[15]

The Fibonacci sequence is a series of numbers where a number is found by adding up the two numbers before it. Starting with 0 and 1, the sequence goes 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, and so forth. Written as a rule, the expression is $xn = xn-1 + xn-2$.

Fibonacci numbers do actually appear in nature, from sunflowers to hurricanes to galaxies.

Sunflowers seeds, for example, are arranged in a Fibonacci spiral, keeping the seeds uniformly distributed no matter how large the seed head may be.

A Fibonacci spiral is a series of connected quarter-circles drawn inside an array of squares with Fibonacci numbers for dimensions.

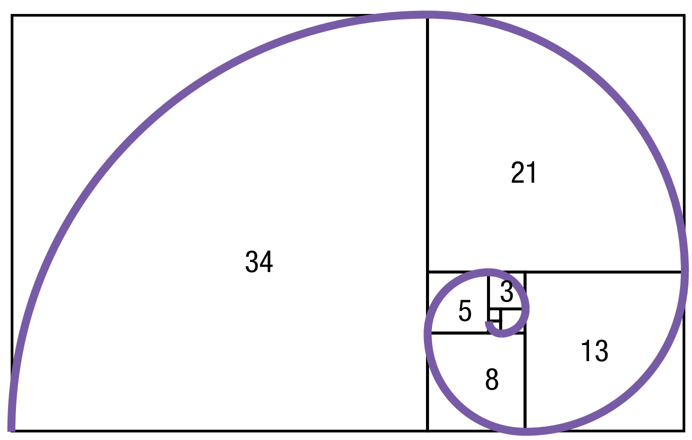
The squares fit perfectly together because of the nature of the sequence, where the next number is equal to the sum of the two before it. Any two successive Fibonacci numbers have a ratio very close to the Golden Ratio, which is roughly 1.618034.

[15] Natasha Glydon, “Music, Math, and Patterns”, ***Math Central***, http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html (Fecha de consulta: 16 de marzo de 2016).

The larger the pair of Fibonacci numbers, the closer the approximation.

The spiral and resulting rectangle are known as the Golden Rectangle.

The Golden Ratio is denoted by the Greek letter phi ϕ. Greek architects used the ratio 1:phi as an integral part of their designs, including the Parthenon in Athens. Though this was not consciously used by Greeks or artists, the Golden Rectangle does appear in the Mona Lisa and other Renaissance art works. Phi is also the ratio of the side of a regular pentagon to its diagonal. The resulting pentagram forms a star, which is the star seen on many flags.



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra los aportes del texto a tus reflexiones respecto a la importancia de las progresiones.

REVISA TU AVANCE

Es importante reconocer en qué momento de tu vida has visto regularidades en sucesiones numéricas. En caso de que no te hayas percatado de ninguna, ahora quizá sea el momento en que te hagas consciente de ello y empieces a utilizarlas a tu favor. También te invitamos a reflexionar sobre qué cosas aprendiste y cuales aún tienes que mejorar; para ello enlista los aprendizajes que lograste y analiza el siguiente trayecto para que identifiques qué lograste y qué te falta por abordar.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Construyes secuencias de eventos generalizados organizados espacial y temporalmente a partir de una rutina.	Describes las regularidades en una secuencia sencilla a partir de interpretar cómo se repite, crece y se ordena.	Identificas y describes el patrón en sucesiones sencillas construidas con objetos o figuras simples.	Produces o completas sucesiones de números naturales en forma ascendente o descendente.	Resuelves problemas que implican identificar la regularidad de progresiones aritméticas y comunicas su estrategia de solución.	Resuelves problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones compuestas y comunicas su estrategia de solución.	Resuelves problemas que implican identificar la regularidad de progresiones aritméticas o geométricas y comunicas y explicas sus estrategias.	Resuelves problemas que implican identificar la regularidad de progresiones aritméticas o geométricas y comunicas sus razonamientos y argumentos.	Utilizas habilidades de razonamiento, comprensión e interpretación para obtener la regla general o la regla de recurrencia de una progresión.	Formulas expresiones algebraicas de primer y segundo grado para modelar progresiones aritméticas y geométricas.	Utilizas diversas estrategias de solución de problemas que modelan situaciones del mundo real; comunicas tus razonamientos, explicaciones y argumentaciones.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

SEP. *Desafíos matemáticos. Segundo grado.* México: SEP, 2014.

SEP. *Desafíos matemáticos. Tercer grado.* México: SEP, 2014.

SEP. *Desafíos matemáticos. Cuarto grado.* México: SEP, 2014.

SEP. *Desafíos matemáticos. Quinto grado.* México: SEP, 2014.

Glydon, Natasha. "Music, Math, and Patterns". En *Math Central*, 2012. http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html (Fecha de consulta: 16 de marzo de 2016).

SEP. *Desafíos matemáticos. Sexto grado.* México: SEP, 2014.

EcuRed. "Sucesiones numéricas". En Ecured, 2016. http://www.ecured.cu/Sucesiones_num%C3%A9ricas (Fecha de consulta: 16 de marzo de 2016).

EL LENGUAJE DEL ÁLGEBRA

ECUACIONES

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

Día a día todos vivimos diversas situaciones que en las que necesitamos poner en juego nuestros conocimientos e ingenio para buscar las mejores soluciones y aprender mucho de cada experiencia. ¿Sabías que las matemáticas son un lenguaje que nos ayuda a modelar situaciones complicadas para encontrar soluciones más certeras y rápidas? ¿Sabías que una expresión matemática tiene mucha información que ofrecerte? Aprender el lenguaje de las Matemáticas y en particular del álgebra te abre las puertas para comprender lo que ellas tienen para ti. Sí, es un lenguaje en código que tienes la oportunidad de aprender y comprender.

Esta Unidad de Aprendizaje te ayudará a conocer el código del álgebra para que puedas expresar y comunicar diversas situaciones utilizando este lenguaje secreto, así como también te ayudará a descifrar los mensajes que otros han escrito.

SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO LÓGICO					
Ecuaciones					
Ecuaciones lineales				Sistema de ecuaciones	Ecuaciones cuadráticas
Expresiones de la forma a+b=_____ _	Expresiones de la forma a+___=b	Expresiones de la forma a(___)=b	Expresiones de la forma ax+b=cx+d	Expresiones de la forma ax+by=n dx+cy=m	Expresiones de la forma ax2+bx+c

PROPÓSITO GENERAL

Reconoceremos las ventajas del lenguaje algebraico para modelar situaciones problemáticas diversas en busca de su solución. Resolveremos problemas que impliquen realizar operaciones con expresiones algebraicas y que involucren el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Aprenderemos a describir y comunicar nuestros procesos de solución a problemas que implican la suma de números naturales, mediante representaciones gráficas o de manera oral.
- Desarrollaremos diversas estrategias para resolver problemas que implican sumas en las que el valor desconocido puede ser cualquiera de los sumandos o el resultado, así como problema que impliquen realizar multiplicaciones. Y compartiremos nuestros procesos de solución.
- Desarrollaremos diversas estrategias para resolver problemas que implican realizar sumas o multiplicaciones con números reales en las que el valor desconocido puede ser cualquiera de los elementos de la suma o de la multiplicación. Y compartiremos nuestros procesos de solución.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El desafío en ecuaciones es descubrir las relaciones entre los datos conocidos y los datos desconocidos del problema, para modelarlo y construir una estrategia que le dé solución. No olvides reflexionar respecto a los objetos y resultados matemáticos que están involucrados en el problema o que consideras te pueden ayudar. Resuelve el siguiente problema con la estrategia que prefieras.

En el cuadrilátero ABCD, el ángulo A mide 120°, el ángulo B mide 90° y el ángulo C es dos tercios del ángulo D. ¿Cuánto miden los ángulos C y D?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra y analiza tu proceso de solución y describe qué conceptos o qué información implícita o explícita en el problema fueron de ayuda para encontrar la solución. Puedes plantearte preguntas como las siguientes:

¿Hubo necesidad de hacer un esquema?, ¿qué información de los cuadriláteros fue necesaria?, ¿qué información de los ángulos fue importante en la solución?

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Al construir otras formas de resolver el problema se aprenden otros aspectos de las ecuaciones y de las matemáticas que quizá no utilizaste en tu proceso de solución inicial.

Por lo anterior te invito a ¡buscar otras maneras de resolver el problema!

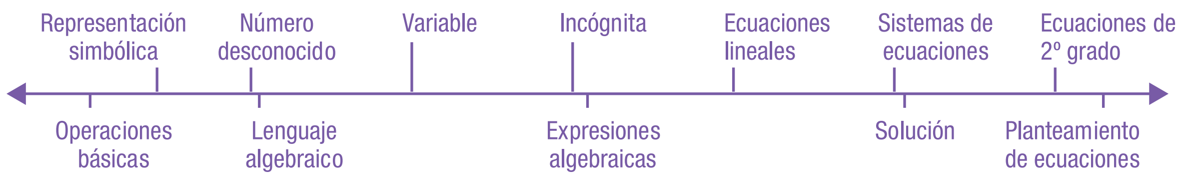
ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra los procesos y los aprendizajes nuevos que construiste con cada una de las otras formas de solución que trabajaste.

Retoma tus intereses iniciales y escribe en tu cuaderno si lograste satisfacerlos, si surgieron otros intereses durante el estudio del tema y si aún tienes dudas respecto a las ecuaciones. Investiga para resolverlas.

REVISA TU AVANCE

Revisa los siguientes aspectos del tema Ecuaciones e identifica cuáles trabajaste en tu estudio a profundidad y puedes dar cuenta de ellos y cuáles te falta trabajar.



ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para ampliar tu conocimiento de las ecuaciones te invito a elegir otro problema. Resuélvelo y estúdialo a profundidad. Es importante que analices cómo se construye la sucesión y cuál es el término general.

En la sucesión de polígonos regulares, ¿cuántas diagonales tiene la figura 20?

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 20

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Describe en tu cuaderno los aprendizajes nuevos y cómo fue que los construiste. Reflexiona respecto a qué significa generalizar y al uso de las expresiones algebraicas para la generalización.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío, te recomiendo poner principal atención en las cantidades y en cómo se relacionan. Además, es una oportunidad para construir lenguaje algebraico a partir de procesos concretos, te invito a que descubras cómo.

Una granjera llevó huevos al mercado. Pensaba venderlos a 10 centavos cada uno. Como en el camino se le rompieron 6 huevos, decidió vender los que le quedaban en 15 centavos cada uno. Cuando regresó a su casa, se dio cuenta que había ganado 1 pesos más de lo pensaba ganar.

¿Cuántos huevos llevaba al inicio?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso de aprendizaje, describiendo tu experiencia con este problema y anota tus reflexiones respecto a la importancia de los ejemplos concretos para construir el lenguaje algebraico.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el desafío de la vida de Diofanto, te invito a buscar diferentes formas de resolverlo. Te recomiendo recuperar poco a poco la información que te ofrece el enunciado y cómo se relaciona con lo que te pide.

"Larga fue la vida de Diofanto, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia; su mentón cubrióse de vello después de otro doceavo de su vida; la séptima parte de su vida transcurrió en un matrimonio estéril; pasó un quinquenio más y le nació un hijo, cuya vida sólo duró la mitad de la de su padre, que sólo sobrevivió cuatro años a la de su amado hijo". ¿A qué edad murió Diofanto?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Descubre con detalle tu experiencia de aprendizaje con este problema. No olvides asegurarte de que puedes dar cuenta de todo lo aprendido.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Seguro hay varias formas de resolver el siguiente desafío, pero te invito a que una de tus estrategias de solución sea la algebraica. Te recomiendo poner especial atención en las incógnitas y en cómo se relacionan con los datos que el enunciado te ofrece.

Un pequeño restaurante tiene un total de 8 mesas. Cuenta con mesas para dos personas y con mesas para cuatro personas. Si el restaurante tiene capacidad para un total de 24 personas sentadas, ¿Cuántas mesas para dos personas hay en el restaurante y cuántas para cuatro personas?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

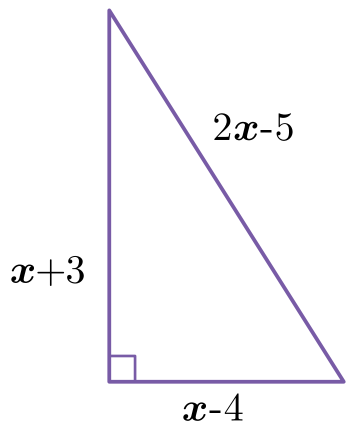
Reflexiona respecto a cuándo se requiere utilizar más de una ecuación para resolver un problema y anota tus reflexiones y argumentos.

Investiga diferentes métodos que te pueden ayudar cuando tienes dos ecuaciones o más de una misma situación problemática y anota tus aprendizajes.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el desafío del triángulo algebraico es necesario que analices con cuidado la información que te ofrece y lo que te pide; no olvides que los esquemas también te ofrecen información.

¿Cuál es el área y el perímetro del triángulo cuyos lados están dados por las expresiones $x+3$, $x-4$ y $2x-5$?



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro describiendo tu proceso de solución, tus aprendizajes y tus reflexiones respecto a la relación entre el álgebra y la geometría.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto ofrece información que te puede ayudar en la tarea de resolver ecuaciones. Identifica aquello que fortalece tus reflexiones realizadas con el estudio de los problemas y también los elementos nuevos que te ofrece el texto.

LENGUAJE ALGEBRAICO

Una ecuación es una igualdad entre expresiones matemáticas que contiene valores desconocidos, a estos valores desconocidos se les llama incógnitas.

$$2\boldsymbol{m}+4=36 \qquad 5(3\text{-}\boldsymbol{y})=\text{-}2\boldsymbol{y} \qquad 15=7\boldsymbol{w}^2\text{-}15\boldsymbol{w}$$

Donde m y w son incógnitas.

Resolver una ecuación significa determinar el valor de la incógnita que satisface la igualdad, es decir, que al sustituir el valor determinado en la ecuación y realizar las operaciones correspondientes, se obtiene el mismo valor en ambos lados de la igualdad. Para la ecuación $2m+4=36$, se puede verificar que m=16 cumple con la igualdad y que ningún otro número la satisface.

Para determinar el valor de la incógnita es necesario despejarla, es decir, dejarla sola en uno de los lados de la igualdad. Para despejar la incógnita es importante realizar operaciones que permitan eliminar los números que le "estorban" para quedarse sola. Las frases como "está sumando pasa restando" son para memorizar y realizar el proceso de manera mecánica, lo cual ayuda a realizar de manera rápida un despeje; sin embargo, las estrategias mecánicas suelen descuidar aspectos específicos de la estructura de la ecuación, lo que lleva al fracaso en su solución. Por ello es prioritario desarrollar y cuidar cada paso del proceso de despeje de la incógnita y verificar la solución de la ecuación y del problema. En el trabajo de despeje de la incógnita es necesario tener en cuenta y respetar las propiedades de la igualdad:

- Propiedad 1: Cuando se suma o resta un número a ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.
- Propiedad 2: Cuando se multiplica o divide por un mismo número, distinto de cero, en ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.
- Propiedad 3: Cuando se eleva a una potencia distinta de cero ambos miembros de la igualdad, la igualdad se mantiene.
- Propiedad 4: Cuando se extrae la misma raíz, en ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso anotando tus reflexiones y argumentos.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Resuelve una por una las siguientes ecuaciones lineales:

a) $X + 4 = 17$
b) $7 + X = 15$
c) $Y + 11 = 6$
d) $4W = 28$
e) $3Z + 4 = 19$
f) $Y/6 = 13$ y
g) $4J + 5 = 14 + J$

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra el proceso de solución de cada una, explicitando la propiedad de las igualdades que hayas utilizado y registra los aprendizajes generados.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto muestra una nueva forma de ver una ecuación.

.

WHAT MAKES AN EQUATION BEAUTIFUL[16]

By Kenneth Chang

The wonder of mathematics is that it captures precisely in a few symbols what can only be described clumsily with many words. Those symbols, strung together in meaningful order, make equations -- which in turn constitute the world's most concise and reliable body of knowledge.

[16] Kenneth Chang, "What Makes an Equation Beautiful," The best of Physics. (The New York Times, 24 Oct. 2004), http://www.nytimes.com/2004/10/24/weekinreview/what-makes-an-equation-beautiful.html

Readers of Physics World magazine recently were asked an interesting question: Which equations are the greatest?

A half-dozen of respondents, including Richard Harrison, chose one of the simplest possible equations.

Mr. Harrison wrote: "'$1 + 1 = 2$' is the fairy tale of mathematics, the first equation I taught my son, the first expression of the miraculous power of the mind to change the real world. I remember my son holding up the index finger, the 'one finger,' of each hand as he learned the expression, and the moment of wonder, perhaps his first of true philosophical wonder, when he saw that the two fingers, separated by his whole body, could be joined in a single concept in his mind."

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Anota en tu registro tu opinión respecto al lenguaje algebraico y en especial respecto a las ecuaciones.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El cero fue una aportación de la comunidad maya a la humanidad, ¿quieres saber por qué? En el siguiente texto descubrirás una razón más para asegurar con admiración que ¡el cero tiene un valor mucho mayor al que representa!

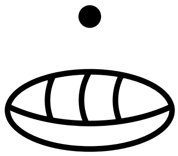
EL CERO[17]

Las matemáticas mayas han dejado una huella en el tiempo; antes que cualquier otra civilización, los mayas originaron un concepto revolucionario: el cero.

---

[17] Silvia María Poveda Pilarte y José David Alemán Pérez. Matemática Maya. *Operaciones fundamentales en la aritmética maya,* (Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua. Recinto universitario "Rubén Darío," Facultad de Educación e Idiomas. Managua: 2006, Departamento de Matemática), 22-25, https://www.google.com.mx/search?q=Bra.+Silvia+María+Poveda+Pilarte%2C+Br.+José+David+Alemán+Pérez.+Matemática+Maya.+Operaciones+fu (Fecha de consulta: 25 de enero de 2016)

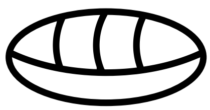
El cero es un símbolo comúnmente utilizado para representar la nada; sin embargo, el concepto maya del cero no implica una ausencia ni una negación; para los mayas, el cero posee un sentido de plenitud. Por ejemplo, al escribir la cifra 20, el cero, puesto en el primer nivel, únicamente indica que la veintena está completa.



1 X 20 = 20

0 X 1 = 0

La posición del cero comprueba que a este número no le falta nada, lo cual es una acepción opuesta al concepto de ausencia o carencia. En este sentido, el 20 es una unidad completa del segundo nivel y del primer nivel. Al ocupar el primer nivel, y generar uno nuevo, da la idea del cierre de un ciclo y el principio de otro. Quizá esto se relacione con las hipótesis que se han generado en torno a la naturaleza y significado original del glifo que representa:



EL CERO

En primer lugar, puede observársele como un puño cerrado: los dedos (que son los numerales con que empezó a contar el hombre) retenidos dentro de un espacio cerrado; contenidos en el puño, integrados y completos. Por otra parte, se le ve como una concha, imagen vinculada con el concepto de la muerte.

Al unir ambas acepciones, se deduce la terminación de la vida, el cierre de un ciclo, la medida que se completa, la integración final. Al ver el glifo y entenderlo como un puño cerrado, este señala que nada sobra, que todo está contenido dentro de la mano, que el conjunto está completo; la concha anuncia que un ciclo de vida ha terminado y que solo queda ahí el remanente, la huella geológica que nos informa que existió y se completó.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de aprendizaje, anota tu opinión respecto al cero.

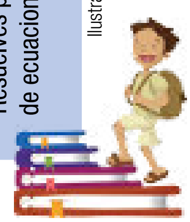
REVISA TU AVANCE

Para que organices tu estudio futuro de las ecuaciones, enlista en tu cuaderno qué aprendiste acerca de éste y de otros conceptos matemáticos, después pide a tu Líder para la Educación Comunitaria, LEC, que revisen de manera conjunta el trayecto del aprendizajes del tema Ecuaciones y anoten qué aprendizajes lograste y cuáles faltarían de abordar.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Usas diferentes formas de expresión para representar y comunicar información de lo que sucede a tu alrededor.	Resuelves problemas de suma de dígitos, comunicas de manera oral y escrita.	Resuelves problemas que implican realizar sumas cuyo resultado es menor a 100 y el valor faltante es la suma o alguno de los sumandos.	Resuelves problemas usando habilidades básicas de interpretación y razonamiento, que involucran a la suma y la resta, modificando el lugar de la incógnita.	Resuelves problemas que implican trabajar con representaciones múltiples y comunicas tus interpretaciones y explicaciones.	Resuelves problemas multiplicativos usando números naturales que incluyen interpretar y razonar en contextos familiares.	Resuelves problemas que implican multiplicar o dividir, modificando el lugar de la incógnita. Comunicas tu estrategia y argumentaciones.	Resuelves problemas que implican crear y analizar diversas representaciones de la información. Comunicas tus explicaciones y argumentaciones.	Resuelves problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: ax+b=c, donde a, b y c son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos.	Resuelves problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: ax+b=cx+d, donde a, b, c y d son números racionales. Reflexionas y comunicas razonamientos y argumentos.	Resuelves problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones y el uso de ecuaciones de segundo grado. Utilizas conocimientos y convenciones para resolver diversas situaciones del mundo real.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo



PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

UAI, primer grado, bloque 3. 66 -70. Conafe (Ecuaciones de primer grado)

UAI, segundo grado, bloque 2. 56-60. Conafe (Operaciones con expresiones algebraicas)

UAI, segundo grado, bloque 3. 64-80. Conafe (Operaciones con expresiones algebraicas)

UAI, segundo grado, bloque 4. 66-76. Conafe (Ecuaciones de primer grado)

UAI, segundo grado, bloque 5. 50-59. Conafe (Sistemas de ecuaciones lineales)

UAI, tercer grado, bloque 2. 64-67. Conafe (Ecuaciones cuadráticas)

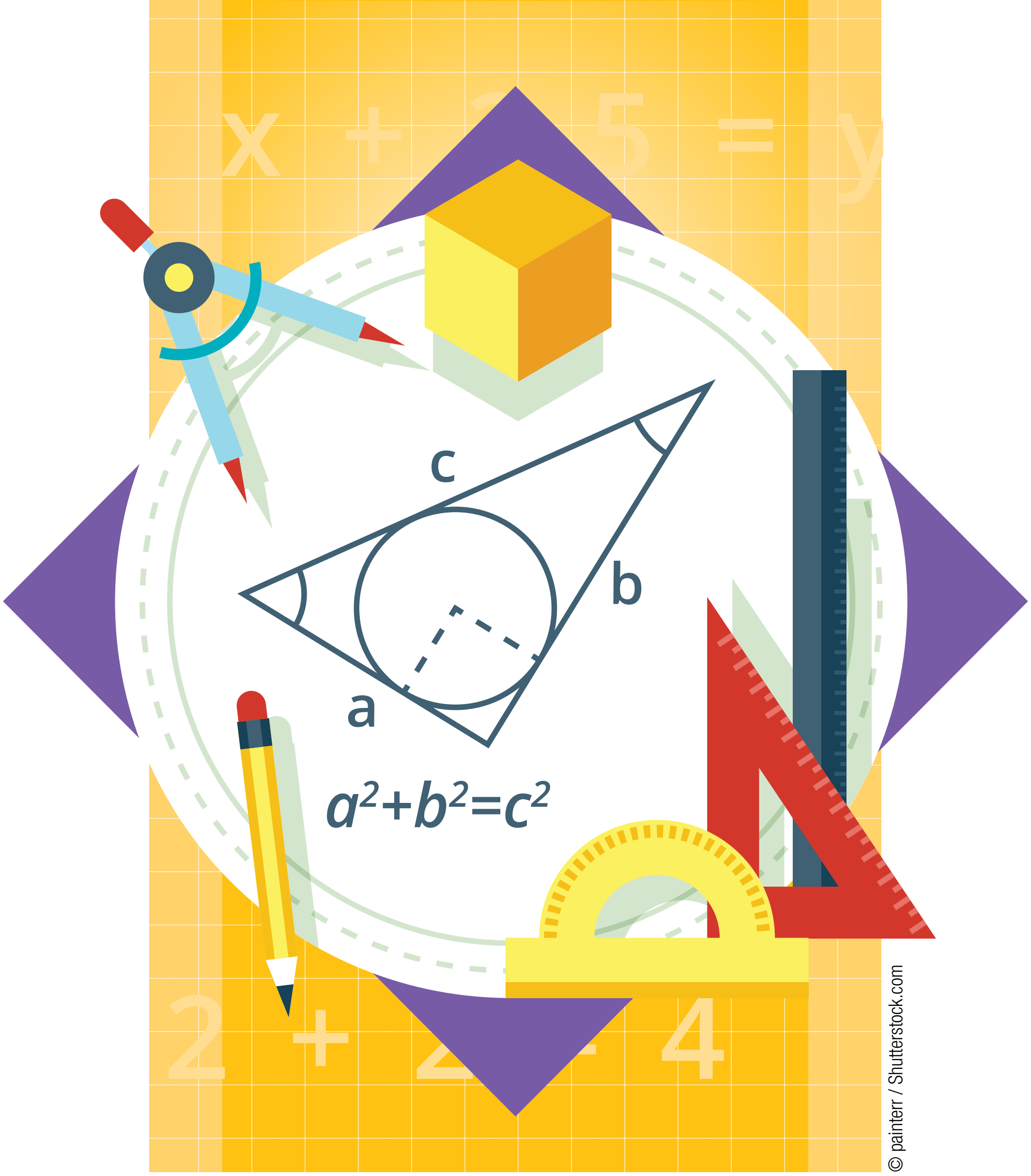
UAI, tercer grado, bloque 3. 58-67. Conafe (Ecuaciones cuadráticas)

Dávila Rascón, Guillermo. *El desarrollo del álgebra moderna.* Apuntes de Historia de las Matemáticas *No. 1, Vol. 2,* enero, 2003. www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-4-algebra.pdf (Fecha de consulta: 25 de enero de 2016)

Poveda Pilarte, Silvia María & José David Alemán Pérez. 2006. *Matemática Maya. Operaciones fundamentales en la aritmética maya.* Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, 2006 Recinto universitario "Rubén Darío," Facultad de Educación e Idiomas. 22-25. Managua: Departamento de Matemática.

https://www.google.com.mx/search?q=Bra.+Silvia+María+Poveda+Pilarte%2C+-Br.+José+David+Alemán+Pérez.+Matemática+Maya.+Operaciones+fu (Fecha de consulta: 25 de enero de 2016)

Chang, Kenneth. What Makes an Equation Beautiful. The best of Physics. *The New York Times,* 24 Oct. 2004. http://www.nytimes.com/2004/10/24/weekinreview/what-makes-an-equation-beautiful.html



MÁS QUE FIGURAS PLANAS

FORMAS GEOMÉTRICAS

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

¿Alguna vez te has detenido a mirar los objetos que te rodean? ¿Sabes por qué tienen esas formas? Bueno, en esta experiencia de estudio te invito a centrar tu atención en las formas que hay a tu alrededor, por ejemplo: qué forma tiene el Sol, la puerta de tu salón, la casa de tu primo, el vaso en donde tomas agua, el patio de la escuela, la pelota con la que juegas, el lápiz con el que escribes, etc. Todo lo que te rodea tiene características y propiedades que lo hace único; estas y otras cosas más descubrirás en esta unidad de aprendizaje. Te invitamos a comenzar esta nueva aventura por las formas mediante el estudio de:

FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

- Formas (figuras y cuerpos).
  - Dibujos de figuras pertenecientes a objetos de entorno.
- Características de figuras y cuerpos geométricos.
  - Lados, caras, vértices, líneas y ángulos.
- Propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.
  - Suma de ángulos, ejes de simetría, diagonales.
- Clasificación de figuras y cuerpos geométricos de acuerdo a sus características y propiedades.
  - Triángulos, cuadriláteros, cilindros, prismas, pirámides.
- Construcción, demostración y argumentación de propiedades y relaciones de figuras y cuerpos geométricos.
  - Herramientas geométricas y construcción de deducciones.

PROPÓSITO GENERAL

Utilizaremos características y propiedades de las formas geométricas para inferir y producir nuevas propiedades de las mismas mediante procesos deductivos, con la finalidad de formarnos para analizar y resolver problemas de la vida cotidiana.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Reconoceremos distintas formas geométricas en nuestro entorno a partir de la observación, exploración y descripción de sus características, para responder preguntas respecto a las formas geométricas.
- Analizaremos propiedades de las figuras y cuerpos geométricos para el desarrollo de habilidades de imaginación espacial, de representaciones y construcción de figuras y cuerpos geométricos, así como para clasificarlas.
- Deduciremos propiedades de las figuras y cuerpos geométricos para comprender las relaciones geométricas que existen entre ellas a partir de sus características y propiedades conocidas.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el estudio de las figuras y los cuerpos geométricos es importante que analices las características y propiedades que conoces de las formas geométricas involucradas así como las relaciones entre ellas. Busca inferir el resultado a partir de los datos dados y las propiedades y las relaciones que no se dicen explícitamente en los problemas.

En el centro de educación comunitaria, los niños decidieron construir dos guarda cositas y propusieron que tuvieran la forma de un prisma y una pirámide, de manera que la base de la pirámide sea un polígono regular diferente a las bases regulares del prisma. Construye los tuyos, puedes utilizar los materiales que tengas a tu alcance: hojas de papel, cartulina, cartón, plastilina, etcétera.

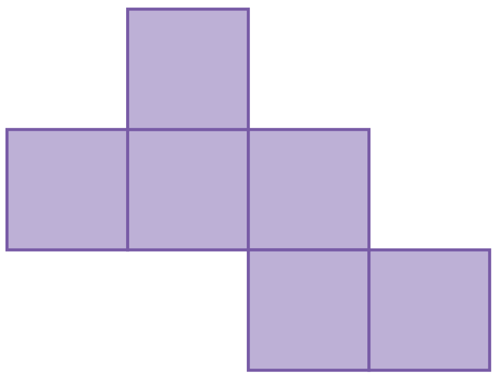
ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra tu proceso de construcción y tus descubrimientos con respecto a las características y propiedades de los cuerpos que elegiste. Te presento algunas preguntas que te pueden ayudar en tus reflexiones: ¿cuáles características comparten los cuerpos geométricos que elegiste con objetos de tu entorno?, ¿qué características, propiedades y relaciones de las figuras utilizaste para construir los cuerpos geométricos?, ¿qué características comparten los dos cuerpos que elegiste?, ¿qué propiedades de las figuras o de los cuerpos utilizaste para tus construcciones?

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente desafío te ayudará a descubrir nuevos elementos de las formas geométricas, es importante que construyas la figura que se pide y justifiques que cumple con las condiciones solicitadas.

Coloca los números del 1 al 6 en el desarrollo plano del dado, de tal manera que los números de caras opuestas sumen la misma cantidad.



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Describe en tu registro tus aprendizajes, ¿qué utilizaste para resolver el problema?, ¿cómo verificaste la validez de tu respuesta?, ¿qué entiendes por razonamiento visual y espacial a partir del trabajo con este desafío?

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En este desafío, además de identificar los datos que proporciona el enunciado y lo que pide, es importante que realices esquemas que te ayuden a visualizar la situación.

En una plaza se quiere construir una pista de baile en forma de paralelogramo, de manera que el ancho sea dos terceras partes del largo, su perímetro igual a 30 metros y que su área sea lo más grande posible. ¿Cuáles son las dimensiones de la pista?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Describe en tu registro qué propiedades de los paralelogramos utilizaste en tu proceso de solución. Reflexiona y registra respecto a: ¿cuántos paralelogramos existen que cumplan con la primera condición?, ¿cuántos paralelogramos cumplen con la primera y la segunda condición?, ¿cuántos paralelogramos cumplen con las tres condiciones?, ¿qué entiendes por razonamiento deductivo?

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Tu imaginación es tu mejor aliado en la solución de este desafío, puedes apoyarte en esquemas o de material concreto para visualizar la situación.

En un cubo de 4 cm de arista, se hacen cortes por los puntos medios de las aristas para retirar las esquinas. ¿Qué características tiene el nuevo cuerpo?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso de aprendizaje, describiendo cómo construiste tus nuevos aprendizajes y qué aspectos nuevos conociste de las formas geométricas.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Lee el siguiente texto buscando elementos que te ayuden a enriquecer tus construcciones y la comunicación de tus resultados.

¿QUÉ QUIERE DECIR REALIZAR UNA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA?[18]

El problema de realizar una construcción geométrica no se refiere a encontrar una solución más o menos aproximada para fines prácticos o sobre algún caso particular, sino establecer un procedimiento general, del que podamos además comprobar su veracidad a partir de propiedades ya demostradas, a través del método deductivo.

Llevar a cabo o realizar una construcción geométrica significa entonces que, a partir de elementos dados o ya construidos (puntos, rectas, triángulos, segmentos, círculos, etc.) se derivan otros elementos, haciendo uso de herramientas predeterminadas (regla, compás, escuadras, transportador, etc.) un número finito de veces. Se tiene además que definir claramente cuál es el uso permitido de las herramientas que se utilizan, suponiendo que los instrumentos tienen precisión ideal.

Cuando mencionamos que se supone que los instrumentos tienen precisión ideal, lo que se quiere decir es que al realizar una construcción, independientemente de los errores que se puedan tener debidos al grosor de la punta del lápiz utilizado, a la exactitud con que se traza la recta por

[18] Lucio Gómez-Maqueo, ***Geometría Moderna I,*** (Notas de clase, Facultad de ciencias de la UNAM, México D:F:, Febrero 2013) pág. 1-8.

dos puntos, etcétera, lo que interesa no es la figura que se puede trazar en el papel, sino que se pueda demostrar que la secuencia de trazos propuestos es matemáticamente correcta; esto es, que efectivamente corresponde de manera abstracta al objeto buscado.

Pudiera sorprender que cuando se pide que se haga una construcción las herramientas permitidas se limiten en general al uso de la regla y el compás, e incluso en el caso de la regla no se permite su uso para medir, sino solamente para trazar rectas, lo que expresamos refiriéndonos a ella como regla no graduada. Esta restricción podríamos decir que es una "tradición" geométrica que se piensa fue establecida inicialmente por Platón y que se refleja de manera fundamental en la obra de Euclides.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Te invito a que continúes con tu registro. Identifica qué aspectos o elementos puedes incorporar a tus procesos de construcción.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto te presenta un poco de la historia que muestra el paso de la matemática intuitiva e inductiva a la deductiva.

LA GEOMETRÍA PREHELÉNICA[19]

Se ha dicho que el desarrollo de la ciencia es una sucesión de preguntas y problemas de las propuestas de respuesta o solución a los mismos. Las preguntas y problemas cambian a través de la historia y las respuestas o soluciones que se formulan evolucionan de acuerdo con el conocimiento disponible en ese momento.

[19] Lucio Gómez-Maqueo, ***Geometría Moderna I,*** (Notas de clase, Facultad de ciencias de la UNAM, México D:F:, Febrero 2013) pág. 1-8.

Es por ello, que para el estudio de la ciencia, y en nuestro caso de la geometría, hacer algunas referencias sobre su desarrollo histórico parece obligado.

La vieja definición de las matemáticas como la "ciencia del número y la magnitud", no corresponde ya con su carácter y desarrollo actual, pero nos permite ver cuáles fueron sus inicios.

La geometría, de acuerdo con el origen mismo de su nombre, surge para resolver una serie de problemas prácticos y en su forma más elemental, se ocupa de problemas métricos como el cálculo del área y perímetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos.

En esta sección no se pretende dar un panorama completo de la historia de la geometría, sino dar una mirada a la naturaleza de los antecedentes de la geometría prehelénica, por lo que se referían solamente a dos de los más importantes hogares culturales de la antigüedad: Mesopotamia y el Valle del Nilo.

En ellos se desarrollaron las civilizaciones babilónica y la egipcia las cuales, de acuerdo con los registros históricos de que se dispone, contaban ya con una forma de escritura alrededor del año 3000 a.C.

El historiador griego Herodoto (siglo V a.C.), da crédito a los egipcios sobre la invención de la agrimensura refiriendo que fue usada para encontrar la distribución adecuada de la tierra después de los desbordamientos anuales del Nilo. Asimismo, se refiere que el interés por conocer los volúmenes de figuras sólidas obedece a la necesidad de evaluar los tributos, almacenar aceite y grano y construir presas y templos.

Los registros más importantes con los que se cuenta de la civilización egipcia son el papiro de Rhind o de Ahmes y el de Moscú, los dos en escritura hierática y con dimensiones aproximadas de seis metros de largo los dos, por treinta centímetros de ancho el primero y de 7 el segundo.

El papiro de Rhind fue escrito aproximadamente en 1650 a.C., a partir de escritos de 200 años de antigüedad, según reivindica el escriba Ahmes al principio del texto, aunque resulta imposible saber qué partes del papiro corresponden a estos textos anteriores.

Es una colección de ejercicios matemáticos y ejemplos prácticos. Contiene 85 problemas.

Muestra el uso de fracciones, la resolución de ecuaciones simples y de progresiones, la medición de áreas de triángulos, trapezoides y rectángulos, el cálculo de volúmenes de cilindros y prismas, y por supuesto de la superficie del círculo.

El problema 51 muestra que el área de un triángulo isósceles se encontraba tomando la mitad de la base y se multiplicaba por su altura. Ahmes sugiere que el triángulo isósceles se puede ver como dos triángulos rectángulos, de tal forma que moviendo uno de ellos de posición, se forme un rectángulo.

La geometría prehelénica pasa a Occidente a través de Grecia y es ahí donde adquiere el carácter deductivo; trasciende la práctica meramente empírica e inductiva de las civilizaciones egipcia y babilónica y da el gran salto cualitativo hacia una ciencia racional, es decir, se funda propiamente la Matemática como ciencia.

Como se ha dicho con anterioridad, las preguntas que se ha hecho el ser humano han ido cambiando a lo largo de la historia y las respuestas se han ido dando con base en el conocimiento acumulado; en el caso de los griegos, las preguntas se fueron transformando y ya no estuvieron referidas a objetos concretos sino geométricos. Los tres famosos problemas griegos: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo son ejemplo del tipo de problemas que atendía la geometría griega.

Como ya se ha dicho el carácter de la geometría griega trasciende la práctica empírica de las civilizaciones babilónica y egipcia; de hecho, algunos autores consideran que no ha habido mayor contraste en las matemáticas que el paso de estas civilizaciones a los griegos, y se preguntan cómo explicar la divergencia entre la práctica antigua que no hacía diferencia entre la verdad exacta o aproximada, en la que las demostraciones eran inexistentes, y la geometría griega en la que se desarrolla un método lógico para demostrar las verdades geométricas.

La contribución esencial de los griegos a la matemática fue el concepto de que los resultados matemáticos deberían ser establecidos deductivamente a partir de un sistema explícito de axiomas.

El texto más antiguo que nos ha llegado en el que se desarrolla el método axiomático deductivo es la obra de los *Elementos* de Euclides. No se tiene mucha información acerca de la vida de Euclides aun cuando se supone que vivió en Alejandría alrededor del año 300 a.C., de acuerdo con el citado Comentario de Proclo al Libro I de los Elementos.

Proclo señala que los elementos de cualquier estudio deductivo deben considerarse los teoremas fundamentales o clave, los que son de uso amplio y general sobre el objeto que se está estudiando, e iniciando con estos elementos, será posible adquirir conocimiento de las otras partes de esa ciencia, mientras que sin ellos será imposible comprender un objeto tan complejo.

Asimismo, de acuerdo con el mismo Proclo, fue Hipócrates de Chíos quien realizó el primer esfuerzo en este sentido; afirma que Euclides introdujo en sus Elementos muchos de los teoremas de Eudoxio, perfeccionó teoremas de otros antecesores y proporcionó demostraciones irrefutables de muchos resultados insuficientemente demostrados por ellos.

A Euclides se debe la elección del sistema de axiomas y postulados, el orden de los teoremas y el rigor de las demostraciones, muchas de ellas suyas, sin duda.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Recupera del texto la información necesaria para enriquecer tu opinión respecto a la geometría.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Los siguientes desafíos te ayudarán a descubrir nuevos elementos de las formas geométricas, es importante que construyas la figura que se pide y justifiques que cumple con los elementos que el texto nos proporciona. El siguiente texto muestra unos cuerpos geométricos muy interesantes, son cuerpos formados por polígonos regulares, los poliedros regulares o sólidos de Platón. También te ofrece la demostración del número de poliedros regulares que existen.

REGULAR POLYGONS[20]

Euclid started off by carving up two-dimensional space into the family of shapes known as polygons, which are those shapes made from only straight lines. With his compass and straightedge he was able to construct not just an equilateral triangle, but also a square, a pentagon and a hexagon.

Polygons in which every side has the same length and the angles between the sides are all equal are called regular polygons. Interestingly, Euclid's method is not effective for all of them. The heptagon (seven sides), for example, cannot be constructed with a compass and straightedge.

The octagon is constructible, but then the nonagon again is not. Meanwhile the staggeringly complex regular polygon that has 65,537 sides is constructible, and in fact has been constructed. (It was chosen because the number is equal to $2^{16}+1$.) Beginning in 1894, it took Johann Gustav Hermes, a German mathematician, ten years to do it.

One of Euclid's pursuits was to investigate the three-dimensional shapes that can be made from joining identical regular polygons together. Only five shapes fit the bill: the tetrahedron, the cube, the octahedron, the icosahedron and the dodecahedron, the quintet known as the Platonic solids since Plato wrote about them in the Timaeus.

20 Alex Bellos, ***Here's Looking at Euclid: A Surprising Excursion Through the Astonishing World of Math,*** (Nueva York: Free Press, 2010), 57-59.

He equated them with the four elements of the universe plus the heavenly space that surrounds them all.

The tetrahedron was fire, the cube earth, the octahedron air, the icosahedron water and the dodecahedron the encompassing dome. The Platonic solids are particularly interesting because they are perfectly symmetrical. Twist them, roll them, invert them or flip them and they always stay the same.

In the thirteenth and final book of The Elements, Euclid proved why there are only five Platonic solids by working out all the solid objects that can be made from regular polygons, starting with the equilateral triangle, and the moving onto squares, pentagons, hexagons and so on. The diagram on page 59 shows how he reached his conclusion.

To make a solid object from polygons you must always have a point where three sides meet: a corner, or what's called a vertex.

When you join three equilateral triangles at a vertex, for example, you get a tetrahedron (A).

When you join four, you get a pyramid (B).

A pyramid is not a Platonic solid because not all the sides are the same, but by sticking an inverted pyramid on the bottom you get an octahedron. Join five equilateral triangles together and you have the first part of an icosahedron (C).

But join six and you get... a flat piece of paper (D).

You cannot make a solid angle with six equilateral triangles, so there are no other ways to create a different Platonic solid made up out of them. Continuing this procedure with squares, it is evident that there is only one way to join three squares at a corner (E).

This will end up as a cube. Join four squares and you get... a flat piece of paper (F).

No more Platonic solids here. Similarly, three pentagons together give a solid angle, which becomes the dodecahedron (G).

It is impossible to join four pentagons. Three hexagons meeting at the same point lie flat alongside one another (H), so it is impossible to make a solid object out of them.

There are no more Platonic solids since it is impossible to join three regular polygons of more than six sides at a vertex.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Anota en tu registro lo que aprendiste del texto y tus reflexiones respecto a qué entiendes por demostración matemática.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Te invito a que sigas profundizando más sobre el tema, mediante la resolución de otros desafíos:

Construye un cono o cilindro con las medidas que prefieras y reflexiona en torno a sus características y propiedades.

Anita compró 30 chocolates que tienen forma cúbica, cuyas aristas miden 1 cm. Desea empacarlos como regalo en una caja que tenga forma de prisma rectangular.

a. ¿Cuáles deben ser las medidas de la caja, de manera que al empacar los chocolates no falte ni sobre lugar para uno más?
b. ¿Es posible empacar tal cantidad de chocolates en una caja de forma cúbica sin que sobre ni falte espacio para uno más?

Argumenta tu respuesta.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Te sugiero continúes poniendo en práctica lo aprendido. Elabora un problema en el que pongas en práctica los elementos que trabajaste en el estudio de la presente unidad.

REVISA TU AVANCE

Recupera tus aprendizajes e identifica tu avance en el siguiente trayecto:

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Construyes objetos, elaboras patrones, categorías y clasificaciones; considerando los grupos, de acuerdo a características afines y estructuras tus propios cuestionamientos y explicaciones.	Reconoces, nombras, describes, comparas y creas formas, a través de observar y analizar objetos de tu entorno.	Identificas semejanzas y diferencias entre composiciones geométricas, mediante comparación de figuras en objetos de tu entorno para resolver problemas simples en contextos familiares.	Identificas las características de figuras planas, simples y compuestas mediante la resolución de problemas donde la información es explícita.	Resuelves problemas que impliquen razonamiento visual y espacial elemental, como identificar ángulos y otros elementos de formas geométricas desde diferentes posiciones.	Relacionas diferentes representaciones de objetos familiares que permitan analizar y clasificar los cuerpos geométricos.	Identificas propiedades de las figuras y cuerpos geométricos a partir de reconocer rectas paralelas, perpendiculares y secantes, así como ángulos agudos, rectos y obtusos.	Explicas y argumentas las características y clasificación de diversos cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos.	Resuelves problemas que implican el uso de las propiedades de los triángulos y los cuadriláteros. Como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, las rectas notables de los triángulos, la existencia y unicidad de triángulos y cuadriláteros.	Resuelves problemas que implican el uso de características, relaciones y propiedades del círculo, como las rectas del círculo, los ángulos inscritos, centrales y externos, la existencia y unicidad. Comunicas tus razonamientos y argumentos.	Deduces y realizas demostraciones sobre las propiedades de figuras y cuerpos geométricos a partir de sus características, relaciones y propiedades conocidas.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

Lucio Gómez Maqueo, Ma. Guadalupe. *Geometría Moderna I. Notas de clase. Facultad de ciencias.* México: UNAM, 2013

Bellos, Alex. *Here's Looking at Euclid: A Surprising Excursion Through the Astonishing World of Math.* Nueva York: Free Press, 2010.

Conafe. *Actividades de trabajo para el preescolar comunitario 2014.* México: Conafe, 2014.

SEP. *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro 2014.* México: SEP, 2014.

SEP. *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro 2014.* Segundo grado. México: SEP, 2014.

SEP. *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro 2014.* Tercer grado. México: SEP, 2014.

SEP. *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro 2014.* Cuarto grado México: SEP, 2014.

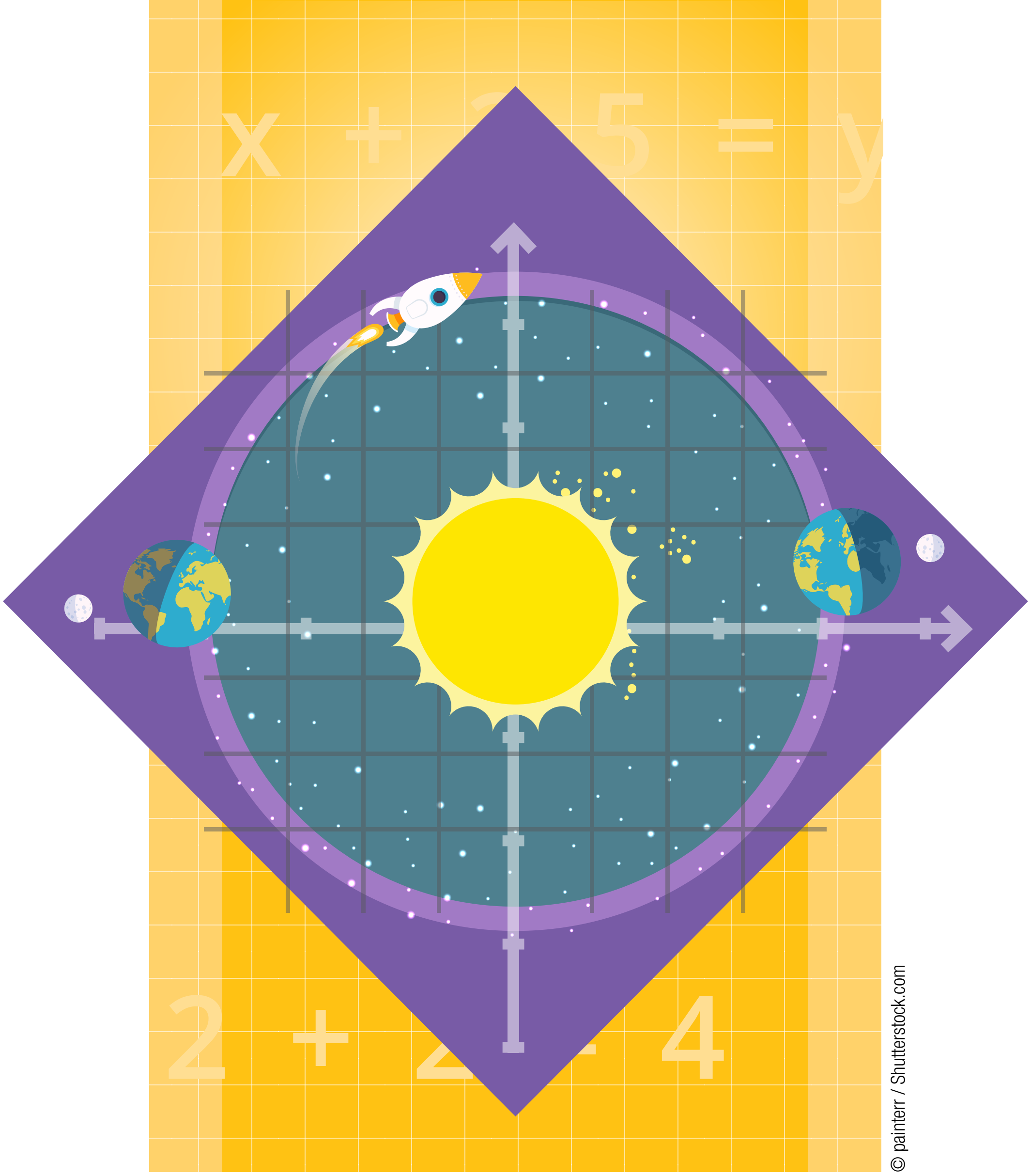
SEP. *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro 2014.* Sexto grado, México: SEP, 2014.

Conafe. *Unidad de aprendizaje independiente: los recipientes de Adriana.* Matemáticas segundo grado. Bloque 2. México: Conafe, 2013.

Conafe. *Unidad de aprendizaje independiente: los cuadros.* México: Matemáticas primer grado. Bloque 1. México: Conafe, 2013.

Conafe. *Unidad de aprendizaje independiente: La talavera.* Matemáticas primer grado. Bloque 3. México: Conafe, 2013.

Conafe. *Unidad de aprendizaje independiente: Conos cilindros y otros cuerpos.* Matemáticas tercer grado. Bloque 5. México: Conafe, 2013.



COMO GRANDES EXPLORADORES

UBICACIÓN ESPACIAL

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo porqué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

Cuando tienes que ir de un lugar a otro es sencillo si conoces la ruta, pero ¿te imaginas tener que moverte en una gran ciudad con muchas avenidas y calles que parecen todas iguales? ¿Cómo ayudas a una persona que no es de tu comunidad a llegar a un lugar determinado o a otra comunidad? ¿Sabes cómo funcionan los GPS?

En esta unidad de aprendizaje trabajarás elementos que te permitan ubicarte en el espacio y conocer algunas herramientas para moverte en lugares desconocidos. También sabrás cómo calcular en qué lugar se encontrarán los objetos que estén en movimiento, tomando en cuenta lo siguiente:

FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

Ubicación espacial

- Ubicación.
  - Puntos de referencia (personales y convencionales)
  - Orientación, proximidad, interioridad y direccionalidad.
- Croquis.
- Mapas.
  - Coordenadas cartesianas.
  - Coordenadas geográficas.
  - Transformaciones en el plano (simetría, reflexión, rotación o traslación).

PROPÓSITO GENERAL

Conoceremos los principales elementos que nos permiten ubicarnos en el plano y en el espacio, así como estrategias para construir, leer y usar mapas.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Estableceremos relaciones con los objetos y entre los objetos para determinar puntos de referencia que nos ayuden a ubicarnos y trasladarnos.

- Reconoceremos las características y uso de diversas representaciones del espacio geográfico: croquis, mapas, planisferios, fotografías aéreas, mapas satelitales.
- Conoceremos cómo trazar rutas y calcular la distancia real de un lugar a otro para determinar las mejores rutas. Además de cómo funcionan los GPS.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el estudio de esta unidad de aprendizaje debes poner atención en establecer los puntos de referencia para la ubicación en el plano y en el espacio. El siguiente desafío te permitirá conocer aspectos importantes de la ubicación espacial.

Karla y Raúl cumplen años el mismo día, 15 de abril. Karla está en México y Raúl viajó con su familia a Japón, pero ellos siguen comunicándose. Karla le habló a su amigo el 15 de abril a las 11 de la mañana para felicitarlo. Raúl se puso muy contento, aunque ya estaba durmiendo y le comentó que su cumpleaños había sido ayer. ¿Cómo es que Raúl cumplió un día antes que Karla?

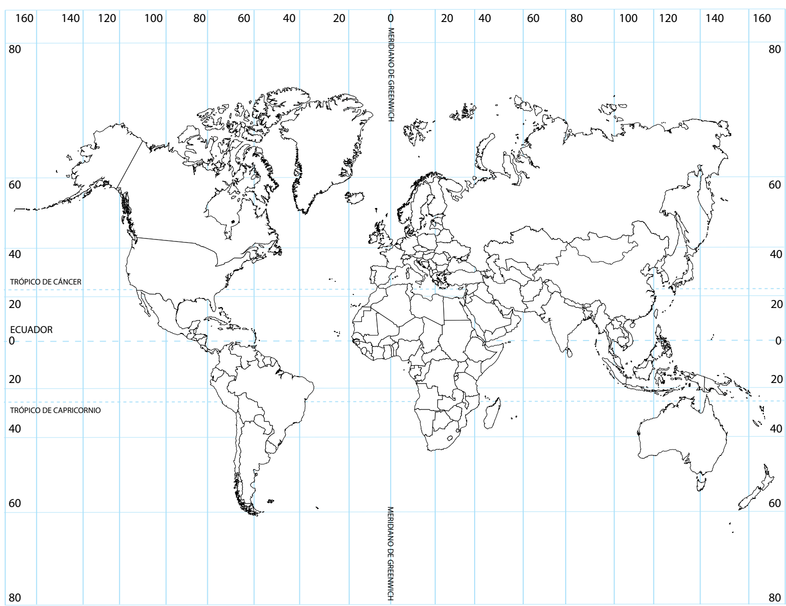


Ilustración: © Javier Velázquez

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Anota con detalle tu proceso de aprendizaje a partir de la solución del problema y anota tus reflexiones respecto a los elementos que se involucran en la ubicación espacial.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío es necesario que identifiques los elementos de un plano que ayudan a la ubicación espacial.

Un corredor que no conoce el centro de Puebla, se encuentra parado en el lugar marcado con la letra A. Él quiere llegar primero al lugar marcado con el punto B para recoger unos papeles y de ahí moverse al Centro de convenciones. Si no tiene un plano a la mano, ¿qué orientación le darías al corredor para hacer su recorrido?, ¿cuál será la distancia mínima que recorrerá?

CENTRO DE PUEBLA

Ilustración: © Javier Velázquez

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

En tu registro de proceso de aprendizaje anota la o las rutas que le propusiste al corredor, anotando con detalle tus reflexiones respecto a los elementos que consideras necesarios para la ubicación.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío es necesario que pongas atención en los referentes que necesitas para ubicar lugares.

El Capacitador tutor quiere visitar las casas de todos los estudiantes del centro educativo, quiere empezar por la casa que esté más alejada del centro educativo, para ello te pide que le indiques cómo llegar. Elabora un croquis y anótale las instrucciones. Aprovecha para indicarle cómo llegar a tu casa.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra cuál fue el proceso que seguiste para construir el croquis y tus aprendizajes respecto a los elementos que contiene un croquis y las diferencias que hay entre un croquis, un plano y un mapa, así como sus usos.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío es necesario que pongas atención en los datos que proporciona el enunciado, que identifique los elementos de matemáticas que están involucrados y que te asegures de comprender los conceptos que se presentan.

Los estudiantes de Conafe escondieron el tesoro del saber en el patio de la escuela. Ellos dejaron escritas las instrucciones y una clave para quien quisiera encontrarlo:

Colocarse en el centro del patio y trazar una recta de norte a sur y otra de este a oeste, la primera será el eje Y y la segunda el eje X. El tesoro se encuentra en el centro de la figura determinada por los puntos: $A(-2,6)$, $B(-10,2)$, $C(-6,-6)$ y $D(2, -2)$.

Clave: El punto A está dos pasos al oeste y seis pasos al norte.

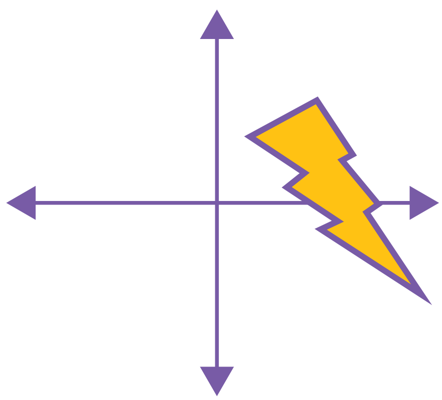
ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra tu proceso para encontrar el tesoro. No olvides anotar los elementos nuevos que aprendiste y que sirven para la ubicación espacial.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío te recomiendo utilizar una hoja blanca, esto te dará mayor libertad de movimiento.

Copia en tu cuaderno la figura siguiente y aplícale un movimiento de reflexión, uno de rotación y uno de traslación para obtener tres posiciones diferentes de la figura.



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra en tu cuaderno el proceso que seguiste para realizar cada uno de los movimientos. Anota tus aprendizajes y tus reflexiones respecto a las transformaciones en el plano.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

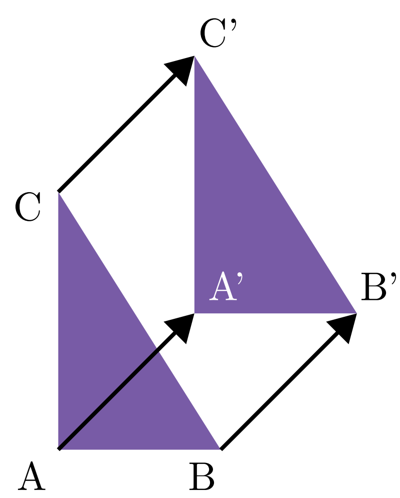
En la siguiente lectura encontrarás las definiciones y ejemplos de los movimientos isométricos.

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS[21]

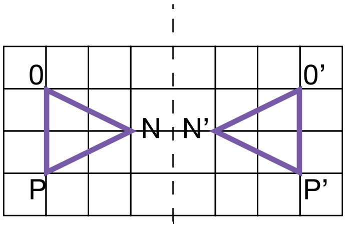
Las transformaciones isométricas son cambios de posición (orientación) de una figura determinada que NO alteran la forma ni el tamaño de esta. La palabra isometría tiene origen griego: iso, que significa igual, y metría, que significa medir. Por lo tanto, esta palabra puede ser traducida como igual medida. Entre las transformaciones isométricas están las traslaciones, las rotaciones (o giros) y las reflexiones (o simetrías).

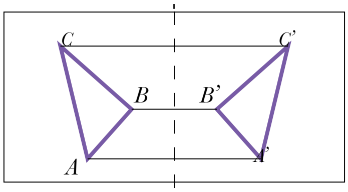
1. Traslación

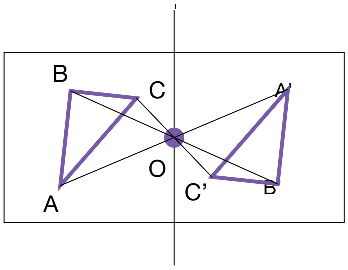
La traslación de una figura plana es una transformación isométrica que mueve todos los puntos de la figura en una misma dirección, sentido y longitud. Para representar gráficamente el movimiento realizado en una traslación, se puede utilizar una flecha (como se muestra en el ejemplo siguiente), a esta flecha se le conoce como vector de traslación.



[21] Portal Educativo Net. “Transformaciones isométricas,” http://www.portaleducativo.net/movil/quinto-basico/760/Transformaciones-isometricas (Fecha de consulta: 17 de marzo de 2016)





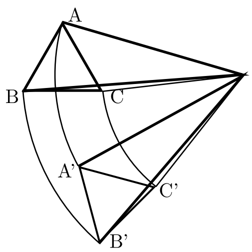


2. Reflexión

Una reflexión o simetría es una transformación isométrica en la que a cada punto de la figura original se le asocia otro punto (llamado imagen), de modo que el punto y su imagen están a igual distancia de una recta llamada eje de simetría.

La reflexión puede ser de dos tipos:

- Simetría axial: Cada punto de la figura original y la imagen de cada uno de ellos bajo la reflexión, se encuentran a igual distancia de una recta llamada eje de simetría.
- Simetría central: Cada punto de la figura original y la imagen de cada uno de ellos bajo la reflexión, se encuentran a igual distancia de un punto llamado punto de simetría.



3. Rotación

Una rotación es una transformación isométrica, en la cual todos los puntos se mueven respecto a un punto fijo llamado centro de rotación (O), en un determinado ángulo, llamado ángulo de rotación. El centro de rotación puede estar en el interior, en el contorno o en el exterior de la figura.

El sentido positivo de la rotación es el sentido antihorario, es decir, contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Mientras que el sentido negativo de la rotación es en el sentido horario.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra el aporte del texto para corregir, enriquecer o realizar tus movimientos isométricos.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En la siguiente lectura encontrarás una explicación de cómo se mueve la Tierra alrededor del Sol y qué efectos tiene ese movimiento para el mundo.

THE REVOLUTION OF THE EARTH AROUND OUR SUN[22]

Throughout the year, as our small blue planet orbits the Sun, many parts of the Earth experience changing seasons. The warm spring brings new flowers and young animals. This is followed by a hot summer filled with vacations, hikes, and outdoor swimming. Following summer is another warm season known as autumn, where leaves turn beautiful shades of red and brown before falling from their trees. Finally, after all of these warmer seasons, comes one that is cold, wet, and dry, known as winter.

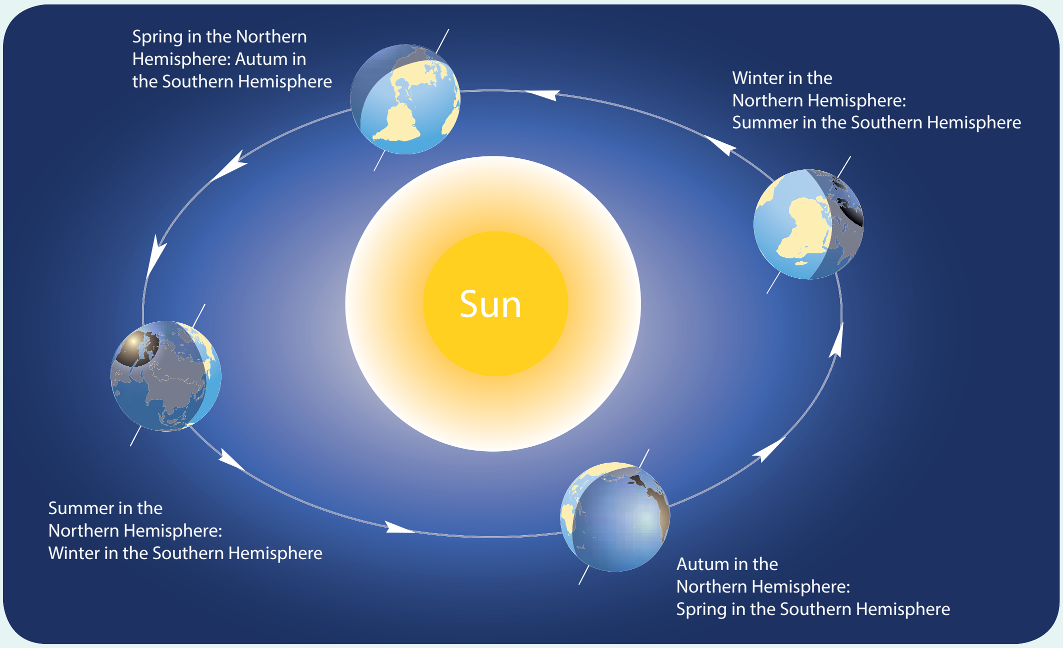


Ilustración: © Javier Velázquez

What causes the changes that we see throughout the seasons? Why is the winter cold and the summer hot? Notice that the axis of the Earth is tilted slightly. This causes part of the Earth to lean towards the Sun, while part of it is hidden either beneath the Earth, or above it, causing different

[22] Debora Dyess, "The Revolution of The Earth Around Our Sun," Kidsgeo, http://www.kidsgeo.com/geography-for-kids/0019-the-revolution-of-the-earth.php (Fecha de consulta: 11 de marzo de 2016)

parts of the Earth's surface to receive a different amount of sunlight and heat. As the Earth moves around its orbit, the portion leaning towards the Sun changes. Throughout part of the year, the bottom half of the Earth, or Southern Hemisphere, leans out towards the Sun, causing the top half of the Earth, or the Northern Hemisphere, to lean away from the Sun. During this time of year, the Southern Hemisphere gets more light and heat, which causes it to be warmer. The effect is that the Southern Hemisphere enjoys summer. At the same time, the Northern Hemisphere receives less light and heat, making it cooler. While the Southern Hemisphere enjoys summer, the Northern Hemisphere is in the midst of winter. As the Earth continues along its orbit around the Sun, the angle that the Earth's axis tilts changes. Eventually the Northern Hemisphere faces the Sun, and the Southern Hemisphere leans away. During this time of the year, it is the Northern Hemisphere's turn to enjoy summer.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra tu proceso de estudio con el texto y el aporte respecto a la importancia de los movimientos de traslación y rotación.

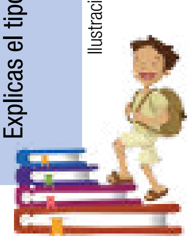
REVISA TU AVANCE

Te invitamos a realizar una investigación en la que muestres qué cosas se mueven todo el tiempo en tu entorno. También te invitamos a reflexionar qué cosas aprendiste y cuales aún tienes que mejorar. Para ello, enlista los aprendizajes que lograste y analiza con tu LEC el siguiente trayecto para que identifiquen qué lograste y qué te falta por abordar

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Construyes relaciones con las personas y los objetos y entre estos, para reconocer características y propiedades como referentes para la ubicación espacial.	Identificas en tu entorno objetos a partir de referentes de ubicación espacial, tomándote como punto de referencia.	Elaboras orientaciones para identificar objetos y lugares del entorno en el que te encuentras; las comunicas de manera verbal y escrita.	Resuelves problemas de conteo que involucran referentes para su ubicación espacial.	Describes figuras compuestas utilizando la posición entre cada figura geométrica que la compone. Comunicas tus observaciones y estrategias.	Resuelves problemas que impliquen razonamiento visual y espacial elemental en contextos familiares, como elaborar croquis para indicar cómo llegar de un lugar a otro.	Utilizas diferentes representaciones para describir rutas y calcular distancias reales de un punto a otro en mapas.	Resuelves problemas que impliquen razonamiento visual y espacial en croquis y mapas. Comunicas tus reflexiones y estrategias.	Resuelves problemas que implican el trazo de figuras simétricas respecto a un eje en diferente posición.	Resuelves problemas que implican el trazo de figuras simétricas respecto a un punto en diferente posición. Comunicas tus reflexiones y argumentos.	Explicas el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada y resuelves problemas que implican la elaboración de mapas.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo



PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

Araujo, Martha Gabriela, Silvia García, José Cruz García, Olga Leticia López, y Verónica Rosainz. *Telesecundaria. Matemáticas I. Primer grado.* México: SEP, 2007.

Desconocido. *Portal Educativo.* s.f. http://www.portaleducativo.net/quinto-basico/760/Transformaciones-isometricas (último acceso: 11 de marzo de 2016).

Dyess, Debora. *KidsGeo.* s.f. http://www.kidsgeo.com/geography-for-kids/0019-the-revolution-of-the-earth.php (Fecha de consulta: 11 de marzo de 2016).

Rosales, Mauricio, Javier Barrientos, Esperanza Issa, María Teresa López, María del Carmen Tovilla, y Laurentino Velázquez. *Desafíos matemáticos. Primer grado.* México: SEP, 2014.

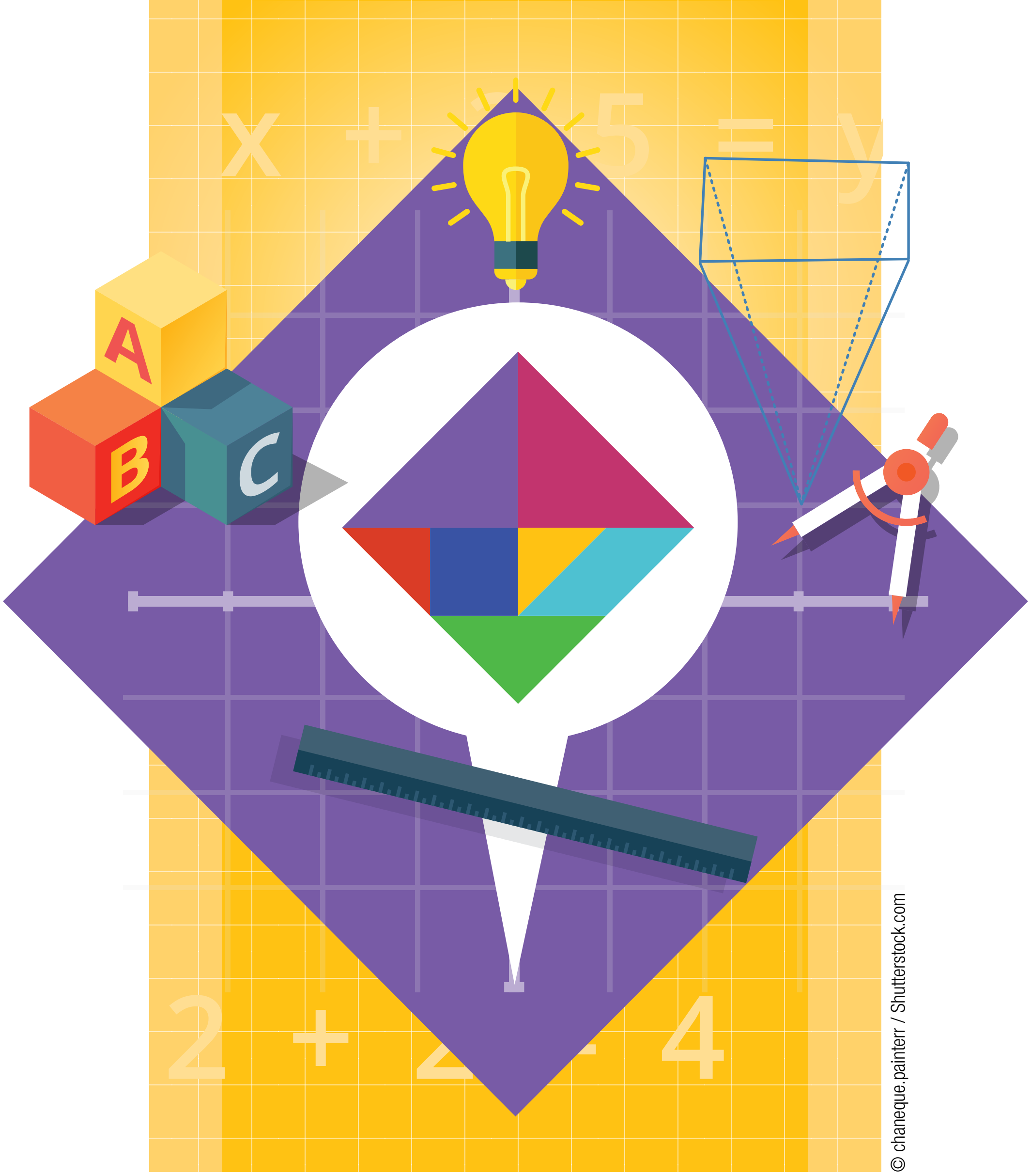
Rosales, Mauricio, Javier Barrientos, Esperanza Issa, María Teresa López, María del Carmen Tovilla, y Laurentino Velázquez. *Desafíos matemáticos. Segundo grado.* México: SEP, 2014.

Rosales, Mauricio, Javier Barrientos, Esperanza Issa, María Teresa López, María del Carmen Tovilla, y Laurentino Velázquez. *Desafíos matemáticos. Tercer grado.* México: SEP, 2014.

Rosales, Mauricio, Javier Barrientos, Esperanza Issa, María Teresa López, María del Carmen Tovilla, y Laurentino Velázquez. *Desafíos matemáticos. Cuarto grado.* México: SEP, 2014.

Rosales, Mauricio, Javier Barrientos, Esperanza Issa, María Teresa López, María del Carmen Tovilla, y Laurentino Velázquez. *Desafíos matemáticos. Quinto grado.* México: SEP, 2014.

Rosales, Mauricio, Javier Barrientos, Esperanza Issa, María Teresa López, María del Carmen Tovilla, y Laurentino Velázquez. *Desafíos matemáticos. Sexto grado.* México: SEP, 2014.



Y SOLO ES COMPARAR...

MEDIDA

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

¿Sabes cuántas cosas medimos a diario los seres humanos? Superficies, capacidades, longitudes, peso, temperatura ¡y hasta el tiempo! ¿Quieres conocer cómo hacemos para obtener esas medidas? ¿Has oído hablar del teorema de Pitágoras? ¿Y de la trigonometría? Medir fue convirtiéndose en una necesidad para los seres humanos a lo largo de la historia: Saber qué distancia tenían que recorrer para poder llegar a otro lugar o para cazar una presa; qué tiempo transcurría entre sembrar granos y su recolección; hasta dónde llegaban los límites de su aldea; cuántos frutos o granos podían intercambiar por otros productos, etc.

En esta Unidad de Aprendizaje conocerás las diferentes maneras en que los seres humanos medimos, mediante el estudio de lo siguiente:

MEDIDA

Longitud.	Superficie.	Espacio.	Peso.	Tiempo.
	Área.	Volumen.	Masa.	
		Capacidad.		

Unidades de medidas arbitrarias.

Unidades de medida convencionales.

Teorema de Pitágoras.

Teorema de Thales.

Trigonometría.

PROPÓSITO GENERAL

Reconoceremos diversas herramientas matemáticas como el teorema de Pitágoras, el teorema de Thales y las funciones trigonométricas, para comprender y resolver situaciones del mundo real que implican aspectos de medición.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Conoceremos cualidades medibles de los objetos y la importancia del uso de unidades no convencionales y convencionales para resolver problemas que implican medir magnitudes de longitud, capacidad, peso.
- Identificaremos y construiremos diversas estrategias para calcular perímetros, áreas, volúmenes y capacidades de objetos y cuerpos geométricos.
- Resolveremos problemas del mundo real que implican conversiones entre unidades de medida de longitud, capacidad, peso y tiempo; así como, conversiones del Sistema Internacional (SI) y el Sistema Inglés de Medidas.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el desarrollo de esta unidad es importante que te asegures de comprender la información que te ofrece cada problema, así como lo que te pide concretamente. Es necesario que te apoyes de gráficos y esquemas para visualizar la información y, sobre todo, que busques argumentos para justificar y comunicar tus observaciones, proceso y resultados.

Para el siguiente desafío te recomiendo elaborar el tangram y analizar cómo está construido.

El siguiente esquema del Tangram tiene 25 cm^2 de área y se quiere construir uno de mayor tamaño para jugar en el centro comunitario: ¿Cuál será el área del nuevo Tangram, si se quiere que el triángulo pequeño tenga 12.5 cm^2 de área?, ¿cuánto medirán sus lados?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

En tu registro, anota con detalle tus observaciones, intentos, estrategias y aprendizajes. Reflexiona respecto a las cualidades de las figuras del Tangram que se pueden medir y anota qué entiendes por medida.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para resolver el desafío siguiente es necesario que identifiques cada una de las medidas que se ofrecen y que analices cómo se relacionan con lo que te pide el problema.

Sea ABC un triángulo equilátero que mide 6cm de lado y P, Q, R los puntos medios de los lados AB, BC y CA, respectivamente. Los vértices del triángulo son centros de los arcos PQ, QR y RP. Encuentra el perímetro y el área de la región formada por los arcos, región PQR.

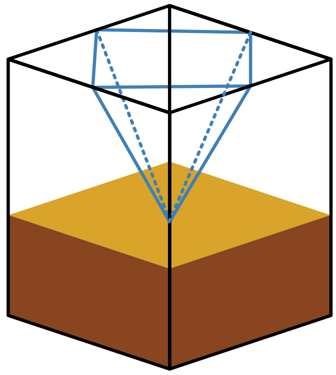
ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra con detalle tu proceso de solución, asegúrate de describir qué entiendes por perímetro y área.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el siguiente desafío saldrás de las formas planas para involucrarte con formas tridimensionales. Te recomiendo imaginar el objeto y asegurarte de conocer cada aspecto y concepto incluidos en el problema.

El siguiente esquema muestra la estructura de un filtro de agua de 1.5 m de alto. La base es un prisma cuadrangular que mide 1m de lado por 50 cm de alto. Determina la cantidad de agua que se necesita para llenar el depósito en forma de pirámide y la cantidad de arena para llenar el resto del contenedor.



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro anotando detalladamente tu proceso de aprendizaje y tus aprendizajes nuevos respecto a las cualidades medibles de los objetos.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Reflexiona respecto al concepto que hasta el momento tienes de medida para identificar en el siguiente texto los elementos que te ayuden a precisar, corroborar o transformarlo.

MEDIDA DE MAGNITUDES[23]

1. La medida como problema empírico, mátemático y didáctico.

[...] La medida de magnitudes nos obliga a reflexionar sobre el difícil problema de las relaciones entre las matemáticas y la realidad. Los fenómenos físicos y sociales son organizados mediante el lenguaje matemático y ello nos lleva a reflexionar sobre la naturaleza de los objetos matemáticos (problemas, técnicas, símbolos, conceptos, proposiciones, justificaciones, teorías, etc.)

[...] Las ideas de magnitud, cantidad y medida en diversos contextos
Es importante tener en cuenta que las prácticas y el lenguaje cambian según el contexto institucional en el que se estudia y (se) usa la medida.

[23] Juan Godino, Carmen Batanero y Rafael Roa. *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*, (Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, 2002), 10-21, http://www.ugr.es/-jgodino/edumat-maestros/welcome.htm

- En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos. "Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad o la luminosidad"; "Cantidad es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar". (Diccionario de M. Moliner).
- En cambio, en las ciencias humanas y sociales esta noción de magnitud y cantidad es demasiado restrictiva, extendiéndose el uso del término magnitud a rasgos de tipo cualitativo (clase social, placer, etc). En este caso, las "cantidades" vienen a ser las distintas modalidades o valores que puede tomar el rasgo o característica del objeto o fenómeno en cuestión.

2. Presentación informal de la medida de magnitudes

2.1. La actividad de medir. Magnitud y cantidad

[...] Se habla de medir (en sentido amplio) para designar la acción de asignar un código identificativo a las distintas modalidades o grados de una característica de un objeto o fenómeno perceptible, que puede variar de un objeto a otro, o ser coincidente en dos o más objetos.

Con esta descripción tenemos en cuenta no solo la medida habitual de características cuantitativas y continuas como longitud, peso, capacidad, etc., sino que también consideramos "medir" asignar una categoría a rasgos cualitativos como el color de los ojos, la región de nacimiento, el grado de placer que ocasiona un estímulo, etc. Cada modalidad (o grado) es un valor de la variable que representa el rasgo correspondiente.

Magnitud

[...] Habitualmente se suele reservar el nombre de magnitud para los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.), o también de manera discreta (p. e. "el número de personas"); las cantidades son los valores de dichas variables.

[...] En este caso, medir una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad (o cantidades) que se toman como referencia (unidades de medida). Por ejemplo, decimos que el largo de la mesa es 1m 40 cm. Al hacer una medición asignamos un número y una unidad de medida, o varias, dependiendo de si la cantidad a medir es múltiplo de la cantidad tomada como referencia o no, y de la precisión deseada.

Aunque en la educación primaria y en la vida cotidiana las magnitudes que se estudian y usan son cuantitativas, y por tanto, medibles mediante números, es importante tener en cuenta que otros rasgos de los objetos y fenómenos con los que entramos en contacto admiten también una codificación que refleja las clasificaciones y ordenaciones que se pueden hacer con ellos. Existen técnicas estadísticas que permiten encontrar relaciones entre los valores de tales variables cualitativas y ordinales.

Cantidad de magnitud

Es importante distinguir los objetos particulares poseedores de un rasgo (un valor concreto), de la clase de objetos que tienen el mismo valor o cantidad de dicho rasgo.

- Por ejemplo, el largo y ancho de este folio DIN A4 es directamente perceptible por la vista y por el tacto.
- En cambio la clase de los folios DIN A4, no es "un objeto" perceptible. Es una norma que declara DIN A4 a cualquier hoja de papel rectangular que mida 21cm de ancho por 29.7 cm de largo.

[...] Con el término cantidad nos referimos habitualmente al valor que toma la magnitud en un objeto particular (el largo de esta mesa es 1.3 m); pero también hablamos de una longitud o distancia entre dos puntos de 1.3 m. En este caso la cantidad de longitud (o simplemente, la longitud) de 1.3 m hace referencia a cualquier objeto de la clase de todos los objetos que se pueden superponer exactamente con el largo de nuestra mesa, al menos imaginariamente.

2.2. Situaciones de medida

Situaciones de comunicación

[...] La situación problemática característica de la medida es la de comunicación a otras personas separadas en el espacio o en el tiempo, de cuántas cosas tenemos, o de cuál es el tamaño (dimensiones) de los objetos y cómo cambian las cantidades como consecuencia de ciertas transformaciones.

La imposibilidad o dificultad de trasladar la colección o el objeto en cuestión en el espacio o en el tiempo, debido al tamaño o naturaleza de los mismos, lleva a tomar un objeto (o varios) de referencia que sí se pueden trasladar o reproducir. Dichos objetos de referencia son las unidades o patrones de medida.

- Ejemplo: Podemos usar una simple cuerda para informar a otras personas (o a nosotros mismos) del ancho de un mueble para ver si cabe en una pared, o las marcas hechas sobre un palo para informar y recordar cuántas ovejas tenemos en el redil en un momento dado.

Comparación y cambio

Otro tipo de situaciones de medida es la búsqueda de relaciones entre cantidades de dos o más magnitudes, actividad que caracteriza el trabajo del científico experimental.

- Ejemplos: ¿Cómo varía el espacio recorrido por un cuerpo al caer por un plano inclinado en función del tiempo transcurrido?

También en la vida diaria se presentan estas situaciones de búsqueda de relaciones entre cantidades: Si esta porción de fruta (1 kg) cuesta 80 céntimos, ¿cuánto debo cobrar a un cliente por esta bolsa?

[...] Afortunadamente no todas las situaciones son distintas unas de otras, sino que hay tipos de situaciones o tareas para las que se pueden usar las mismas técnicas e instrumentos. Se cuenta de la misma manera las ovejas del redil, o el número de árboles de la finca; se mide igual el largo de este folio que el ancho de la mesa. Nos interesa identificar, describir y enseñar estas invariancias de situaciones, técnicas y lenguaje (oral y escrito) para legar a las generaciones venideras nuestros artefactos de medida, incluyendo el lenguaje de la medida.

2.3. Escalas de medida y tipos de magnitudes

[...] Escala nominal: Hay rasgos cuyas distintas modalidades permiten clasificar los objetos y fenómenos a los cuales se atribuyen, pero dichos valores no se pueden ordenar ni tiene sentido realizar acciones de agregación o de separación con ellos. Se dice que, en estos casos, se usa una escala de medida nominal. Los códigos asignados funcionan como etiquetas identificativas, pero no se puede operar algebraicamente con ellos. No tiene sentido agregar el color azul con el negro cuando hablamos del color de los ojos de un grupo de personas.

Escala ordinal: Hay otros rasgos cuyas cantidades o valores se pueden ordenar de mayor a menor, pero no se pueden agregar. Por ejemplo, en una cola para entrar a un espectáculo podemos observar el lugar que ocupa cada persona (1º, 2º, 3º, ...); aquí no tiene sentido tomar dos personas "agregarlas" y decir el orden que ocupa "el objeto agregado". En estos casos se dice que la escala en la que se mide el rasgo correspondiente es ordinal.

Magnitudes intensivas: Existen rasgos para los que tiene sentido agregar los objetos que los soportan pero la cantidad del rasgo en el objeto agregado no es proporcionalmente aditiva. Esto ocurre, por ejemplo, con la temperatura, la presión, la densidad. Podemos mezclar dos cantidades iguales de un líquido a temperaturas de 20° y 30°, respectivamente, y la cantidad que se obtiene agregando los dos líquidos sigue teniendo el rasgo de la temperatura, pero esta no es la suma de las temperaturas de los líquidos en cuestión. En estos casos se habla de magnitudes intensivas.

Magnitudes extensivas: En otros rasgos, como la longitud, el peso, el área, etc.; estas magnitudes se pueden describir como "proporcionalmente agregables", y la escala de medida correspondiente se dice que es de razón. También se habla en este caso de magnitudes extensivas o sumables: la cantidad de magnitud de un objeto compuesto de partes se obtiene agregando las cantidades de cada parte (esta operación de agregación se considera también como suma de cantidades).

2.4. Precisión y errores de medida

Al medir cantidades de magnitudes continuas cometemos errores por diversas causas, que van desde el propio procedimiento, hasta fallos de la persona que mide. Por tanto, los valores que obtenemos son aproximados. El error de una medida también puede estar motivado por los errores sistemáticos del instrumento, que pueden deberse a defectos de fabricación, variaciones de la presión, la temperatura o la humedad. Estos errores no pueden eliminarse totalmente y para que su valor sea lo más pequeño posible se realizan pruebas de control que consisten en cotejar las medidas con las de un objeto patrón.

En el proceso de medir es necesario, por tanto, estimar el error que se comete al tomar ese valor. La precisión de un instrumento de medida es la mínima variación de magnitud que se puede determinar sin error. Un instrumento será tanto más preciso cuanto mayor sea el número de cifras significativas que puedan obtenerse con él.

- Para estimar la medida de una cantidad, acercándose lo más posible al valor exacto, hay que repetir la medida varias veces, calcular el valor medio y los errores absolutos y las medidas de dispersión correspondientes.
- El error absoluto de una medida cualquiera es la diferencia entre el valor medio obtenido y el hallado en la medida.
- El error de dispersión es el error absoluto medio de todas las medidas. El resultado de la medida se expresa como el valor medio "más, menos" el error de dispersión.
- Metrología es la ciencia que tiene por objeto el estudio de las unidades y de las medidas de las magnitudes; define también las exigencias técnicas de los métodos e instrumentos de medida.

2.5. Sistemas irregulares y regulares de unidades de medida

[...] Cuando la medida no es entera hay que recurrir a un encuadramiento. Ejemplo: Si deseamos medir el largo de la mesa usando como unidad el largo de un folio DIN A4 diremos que la medida está entre 6 y 7 folios. Si esta medida es demasiado grosera para el fin que pretendemos podemos tomar una unidad más pequeña, por ejemplo, el ancho del folio, o la anchura de un alfiler. En este último caso podríamos precisar que el largo de la mesa está comprendido entre 1,400 y 1,401 anchos de alfiler.

En el ejemplo anterior, también podemos usar las tres unidades, afirmando que el largo de la mesa mide 6 largos de folio, 1 ancho de folio y entre 150 y 151 alfileres. Esta manera de expresar la medida, usando varias unidades para aumentar la precisión se dice que es una expresión compleja de medida.

En este ejemplo hemos usado un sistema irregular de unidades de medida, lo que plantea problemas a la hora de realizar cálculos y conversiones entre

las distintas unidades. Por ello es aconsejable adoptar sistemas regulares de unidades. Un sistema regular para la longitud podría ser, siguiendo con el ejemplo del largo de un folio como unidad principal, tomar como primera subunidad la mitad del folio, la siguiente, la mitad de la mitad, etc., y como sobreunidades (múltiplos), el doble de un folio, cuatro folios, etc.
En principio cualquier sistema regular podría ser válido y cómodo para expresar las mediciones, pero hay razones que justifican el uso de un sistema común y universalmente aceptado de medidas. Ello permite comunicar los resultados de las medidas a cualquier parte, sin necesidad de llevar consigo las unidades adoptadas. Decir que la masa de un objeto es 3 u_2 1 u_1 supone no decir nada a quien desconoce las unidades u_2 y u_1, de manera que se impone el uso común de un sistema de medida previamente acordado. Estos sistemas de medida reciben el nombre de legales, pues su uso ha sido regulado mediante leyes.

Nuestro sistema legal y el de todo el mundo, a excepción de los países anglosajones que se encuentran en proceso de cambio, es el Sistema Métrico Decimal, que naturalmente es un sistema regular en el que los cambios se realizan de diez en diez (decimal) en las magnitudes lineales, y según potencias de diez en las otras magnitudes.

2.7. Conexiones entre distintas magnitudes

[...] Magnitudes discretas y número natural.
En muchas situaciones prácticas nos interesamos por una característica de las colecciones de objetos que podemos designar como “la numerosidad”, ¿cuántos árboles hay en este bosque?, ¿cuántas personas hay en la sala?, etcétera. Como respuesta a estas situaciones hemos inventado diversas técnicas de contar, siendo la más eficaz, y generalmente usada, pronunciar la llamada “cantinela numérica”: uno, dos, tres, ..., o escribir los símbolos, 1, 2, 3, ...
Ejemplo: Si estamos tratando con conjuntos de personas decimos, por ejemplo, que hay 35 personas, si tratamos con árboles, 235 árboles, etc. Estas expresiones corresponden a cantidades de las magnitudes discretas “número de personas”, “número de árboles” (o bien, la cantidad o numerosidad de ....). Observa que hay que diferenciar entre las cantidades de estas magnitudes y las palabras o símbolos, 1, 2, 3, ... que sólo son instrumentos lingüísticos para contar. Con ellos se opera (suman, restan, multiplican, dividen, se comparan, obteniendo una estructura algebraica bien caracterizada), pero estas

operaciones son de una naturaleza esencialmente diferentes a las operaciones que se pueden realizar con las cantidades de magnitudes discretas (agregar, componer, descomponer, etc.).

Masa y peso

[...] Desde un punto de vista físico, masa y peso son magnitudes diferentes. La masa de un cuerpo es el contenido en materia de dicho cuerpo (dejamos sin aclarar qué es la materia), mientras que el peso es la fuerza con que la Tierra (u otro cuerpo) atrae a un objeto. La diferencia se aclara porque objetos de la misma masa tienen un peso diferente en la Luna que en la Tierra, o situado uno en una montaña elevada. Sin embargo, objetos de igual masa situados en un mismo lugar de la Tierra tienen el mismo peso. La identificación de ambas magnitudes a nivel popular es muy grande y muchas expresiones usuales lo ponen de manifiesto. En la práctica escolar es imposible que ambas características de los cuerpos puedan ser distinguidas; además, los instrumentos usados para medir masas en realidad miden pesos, por lo que no parece procedente hacer distinciones entre ambas magnitudes en los niveles de educación primaria.

Volumen y capacidad

[...] El término volumen se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio. Se trata de una magnitud extensiva, derivada, cuya unidad principal es el metro cúbico (m^3). Se usa la palabra capacidad para designar la cualidad de ciertos objetos (recipientes) de poder contener líquidos o materiales sueltos (arena, cereales, etc.).

En realidad no se trata de una magnitud diferente del volumen: la capacidad de un recipiente coincide con el volumen del espacio interior delimitado por las paredes del recipiente, y viceversa, el volumen de un cuerpo coincide con la capacidad de un recipiente que envolviera completamente a dicho cuerpo. Cuando se habla de capacidades la unidad principal es el litro (ℓ) que es el volumen de 1 dm^3.

Área y superficie

[...] Con frecuencia estas palabras se usan de manera indistinta, pero es necesario distinguir dos conceptos diferentes, aunque relacionados. Si nos fijamos en los cuerpos o figuras geométricas debemos distinguir entre la forma que tienen (esférica, piramidal, rectangular, plana, alabeada, etc.) y la mayor o menor extensión que ocupan. La palabra superficie se debería reservar para designar la forma del cuerpo o figura (superficie plana, alabeada, triangular), mientras que la palabra área debería designar la extensión de la superficie. El rasgo o característica de los cuerpos que se mide cuantitativamente es el área o extensión.

2.9. Medida directa e indirecta de cantidades

[...] Las cantidades de una magnitud pueden ser medidas en unos casos directamente usando los instrumentos de medida (el metro, sus múltiplos y divisores para las longitudes; el kg, sus múltiplos y divisores para el peso, etc.). Esta medición directa quiere decir aplicando reiteradamente las unidades de medida hasta lograr cubrir la longitud que se quiere medir, hasta conseguir equilibrar la balanza, etcétera, y según la precisión deseada.

En otros casos, si el objeto en cuestión no puede medirse directamente, bien por su tamaño, forma, etc., pero se puede descomponer en partes o secciones cuya medida se conoce, podemos determinar la medida del objeto mediante operaciones aritméticas. Se habla entonces de medida indirecta.
Ejemplo: No hace falta recubrir una superficie de losetas para determinar el área de dicha superficie. Ésta se puede determinar con frecuencia mediante el cálculo sobre las dimensiones de la superficie.

Una vez definida la unidad de medida para ciertas magnitudes, a partir de estas unidades se pueden definir las correspondientes a otras magnitudes. Las primeras se conocen como magnitudes fundamentales y las segundas como magnitudes derivadas. El carácter fundamental o derivado de una magnitud no es intrínseco a la misma. Un sistema de unidades establece y define con precisión cuáles son las unidades fundamentales.

Medida indirecta de áreas y volúmenes

[...] El estudio escolar de las magnitudes área y volumen debe incluir una primera etapa de identificación de la característica correspondiente de los objetos (superficies y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas), siguiendo el proceso que se describe más adelante. Pero en la práctica las cantidades de áreas y volúmenes se miden de manera indirecta mediante el cálculo a partir de las medidas lineales de las dimensiones de las figuras o cuerpos. Así, la medida del área de un rectángulo se calcula multiplicando la longitud de la base por la altura ($A = b\ x\ a$), y el volumen de un ortoedro, multiplicando las longitudes de las tres aristas que concurren en un vértice ($V = a \times b \times c$).

Medida y unidad de medida

[...] En el trabajo con magnitudes es necesario comparar distintas cantidades. La comparación se ve facilitada si se toma una cierta cantidad [u] como referente o término de comparación y se determina cuantas veces contiene una cantidad dada [a] a [u]. Este número de veces, si existe, es lo que se llama "medida" de la cantidad [a] con la unidad [u]. Medir cantidades es esencial en el proceso de cuantificación de la realidad, proceso que se ve facilitado por la reducción de las cantidades a números, con los cuales podemos tratar como si se tratara con las cantidades originales.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

En tu registro de proceso de aprendizaje recupera del texto los elementos que te ayudaron para confirmar, enriquecer y argumentar tus aprendizajes respecto al tema Medida. Continúa tu registro anotando detalladamente tu proceso de aprendizaje y tus aprendizajes nuevos respecto a las cualidades medibles de los objetos.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

VOLUME VS CAPACITY[24]

If there are two terms in general science that are most often interchanged in use and meaning, they are none other than volume and capacity. To give you an idea of the real differences between these two terms, let us compare their definitions.

[24] Difference Between Volume and Capacity, http://www.differencebetween.net/science/difference-between-volume-and-capacity/ (Fecha de consulta: 21 de abril de 2016).

Firstly, to what exactly does volume refer? Whether something is a liquid, a solid, or a gas, volume refers to the amount of three-dimensional space that it occupies. Some of the most common units of volume include cubic meters, liters, milliliters and cubic centimeters.

Secondly, capacity refers to the ability of something to hold, receive, or absorb. It is similar in concept to volume, but there are a few differences. One good example to illustrate the difference between capacity and volume is how they are used in sentences. Take a look at the following:

- The helium gas tank has a capacity of 12 gallons.
- The gas in our experiment expanded to twice to its original volume.

In the sentence examples, volume is used to describe the three-dimensional size of the object, which was gas. Meanwhile, capacity refers to the volume that the gas tank could hold.

Another example is that capacity is the ability of a container to hold two cups of rice, while that same container may have a volume of 5 cubic centimeters, which refers to the amount of space that the container itself occupies.

To summarize, volume is the space taken up by the object itself, while capacity refers to the amount of substance, like a liquid or a gas, that a container can hold.

Summary:

1. Volume is the amount of space taken up by an object, while capacity is the measure of an object's ability to hold a substance, like a solid, a liquid, or a gas.
2. While volume is measured in cubic units, capacity can be measured in almost every other unit, including liters, gallons, pounds, etc.
3. Volume is calculated by multiplying the length, width, and height of an object, while capacity's measurement is geared more towards cc or ml.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso de aprendizaje detallando tu experiencia con este texto y escribe tu reflexión respecto a cuál es la razón por la que se confunde capacidad con volumen.

REVISA TU AVANCE

Enlista tus aprendizajes correspondientes a medida y pide a tu LEC que te ayude a revisar el trayecto del tema. Esto te permitirá reconocer cuál es tu avance y qué puedes trabajar en otro momento.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Construyes secuencias de eventos generalizados organizados espacial y temporalmente a partir de una rutina. Avanzas en la ubicación del tiempo y del espacio.	Identificas características medibles de objetos de tu entorno para clasificarlos y comunicas tus observaciones.	Resuelves problemas que impliquen ordenar de manera creciente o decreciente, objetos por tamaño, capacidad, peso.	Reconoces y utilizas el lenguaje matemático para describir características medibles de objetos y formas geométricas, en la resolución de problemas.	Resuelves problemas que impliquen el cálculo de perímetros y áreas utilizando formas no convencionales. Comunicas tus razonamientos.	Resuelves problemas que impliquen establecer relaciones temporales. Comunicas tus estrategias y razonamientos.	Resuelves problemas que impliquen el cálculo de peso de objeto, utilizando diversas estrategias.	Resuelves problemas que impliquen razonar y calcular el volumen y la capacidad de objetos y cuerpos geométricos, utilizando diversas estrategias y representaciones.	Identificas diferentes relaciones entre la información relevante para la resolución de problemas de medida que requieren transformación de unidades. Comunicas tus razonamientos y argumentaciones.	Resuelves problemas de medida que implican identificar y extraer información relevante de enunciados y esquemas.	Resuelves problemas de medida que implican relacionar información explícita e implícita. Comunicas tus soluciones y das explicaciones y argumentaciones de las estrategias demedición utilizadas como Teorema de Thales, Teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

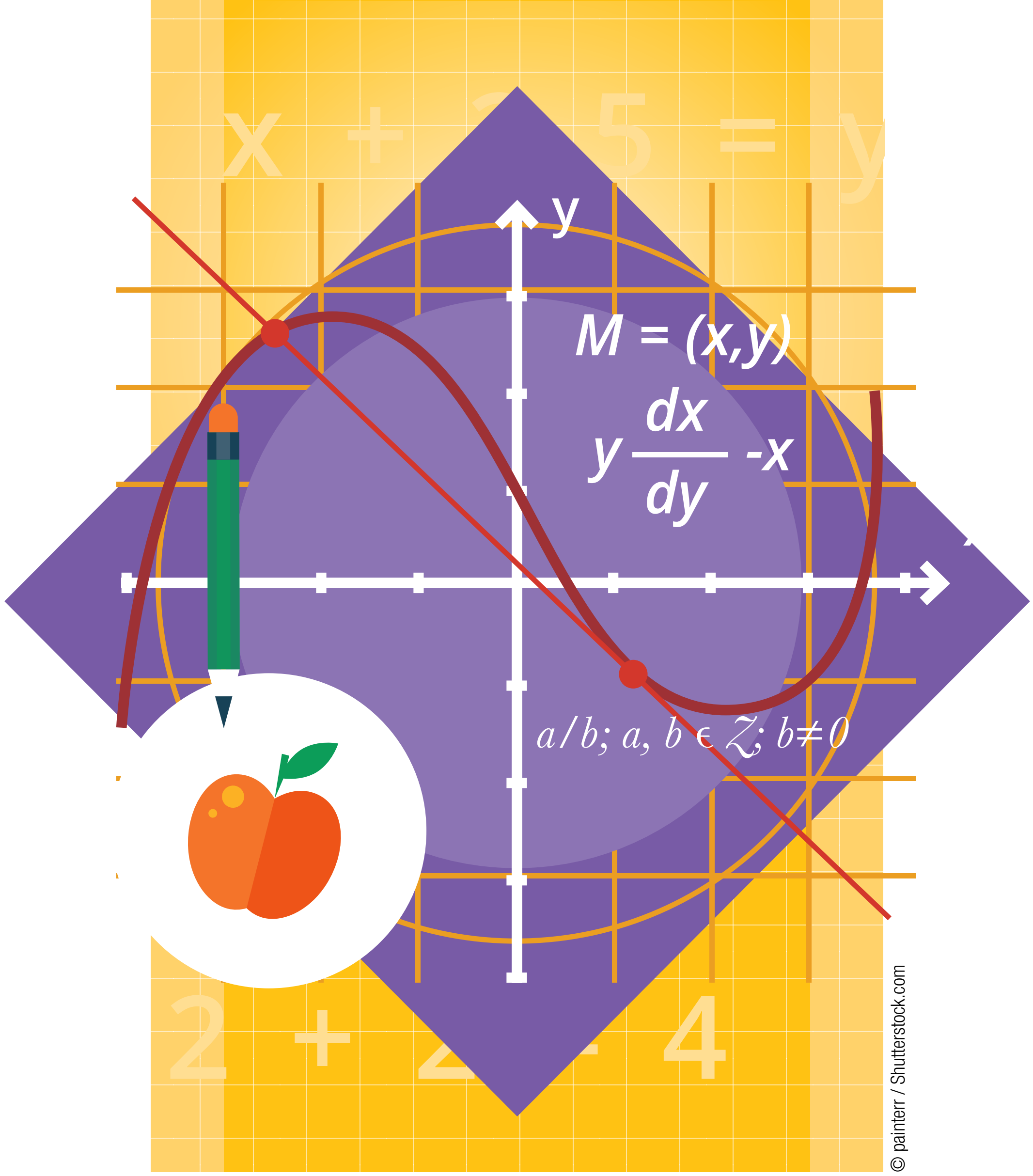
PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

Conafe. *Cómo aprendemos matemáticas*. Serie: guías de orientación y trabajo. México: 5a edición. 57-65, 1991.

Proyecto Edumat-Maestros. *Matemáticas y su didáctica para maestros.* www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf (Fecha de consulta: 15 de junio de 2016).

http://www.differencebetween.net/science/difference-between-volume-and-capacity/ (Fecha de consulta: 21 de abril de 2016).



LO EQUITATIVO, LO JUSTO Y EL CAMBIO EN MATEMÁTICAS

PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

¿Sabes cómo aumentan o disminuyen el tamaño de una foto sin que la imagen pierda su forma? ¿Cómo pueden calcular cuántas personas hay en una reunión masiva (un baile, una manifestación, una marcha)? ¿Cómo pueden calcular el aumento o disminución de cantidades a corto y a largo plazo? ¿Cómo se sabe qué cantidad de líquidos y sustancias debe haber en una mezcla para que funcione (la cantidad de abono, plaguicidas o sustancias en la elaboración de medicamentos)? ¿Cómo se calculan las medidas para que los paisajes, retratos, formas y planos sean buenas representaciones de los reales? La proporcionalidad ofrece respuestas a estas y muchas otras preguntas.

En esta Unidad, abordarás el tema de Proporcionalidad y funciones que te permitirá conocer e identificar cómo se relacionan diversas magnitudes, tomando en cuenta lo siguiente:

TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN: PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES

Relaciones.	Proporciones.		Variación.
Cantidades directamente proporcionales.	Proporción directa.	Proporción inversa.	Variables dependientes e independientes.
Reparto proporcional.	Razón y proporción.	Constante de proporcionalida.	Representación algebraica y gráfica.
Valor unitario.	Regla de tres.	Tablas de proporcionalidad.	Variación lineal.

Porcentajes.	Escalas.	Interés simple y compuesto.

PROPÓSITO GENERAL

Conoceremos y manejaremos estrategias y herramientas para analizar el cambio o variación en el tiempo de fenómenos naturales y sociales para predecir comportamientos y resolver diversas situaciones.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Identificaremos, interpretaremos y trabajaremos información de textos y tablas, para resolver problemas mediante cálculos simples que impliquen relaciones entre dos variables.
- Compararemos razones con base en la equivalencia, y cómo se relacionan fracciones, decimales, la unidad de referencia y porcentajes.
- Analizaremos funciones lineales asociadas a diversos fenómenos del mundo real.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para trabajar este desafío te recomiendo que identifiques la o las relaciones que existen entre los datos involucrados y lo que se pide, para que analices cuáles te pueden ayudar para resolver el problema.

Una familia se dedica a la producción y venta de queso artesanal. Disponen de 20 trabajadores para producir 100 kilos a la semana y por cada kilo de queso utilizan 10 litros de leche. Si les hacen un pedido de 400 quesos, de 3/4 de kilo cada uno, ¿qué cantidad de leche se ocupará? Por otro lado, renunciaron tres de los trabajadores, ¿en cuánto tiempo tendrán listo el pedido?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra con detalle tu proceso de aprendizaje, anota qué dificultades tuviste en tu estrategia de solución, qué hiciste para salir de las dificultades y qué aprendizajes obtuviste.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Con la intención de fomentar la actividad física y la convivencia, los habitantes de la comunidad decidieron construir una cancha para fútbol soccer y formaron un comité coordinador del proyecto. El comité les pidió a los estudiantes de Conafe que investigaran las medidas de la cancha y que elaborarán un modelo a escala para presentarlo y trabajar en los costos. Los estudiantes encontraron que las medidas para una cancha de fútbol soccer son:

- Largo: Mínimo 90 metros – Máximo 120 metros
- Ancho: Mínimo 45 metros – Máximo 90 metros
- El círculo central tiene 9.15 metros de radio.
- El área chica o área de meta mide 5.5 metros de largo y 7.32 metros de ancho.
- El área grande o área de penal tiene 16.5 metros de largo y 40.3 metros de ancho.
- El punto penal tienen una distancia de 11 metros con la línea del fondo.

¿Cuáles serían las dimensiones del modelo?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso de aprendizaje anotando tus estrategias y nuevos aprendizajes de proporcionalidad. No olvides detallar cuál fue la escala que elegiste para el modelo de la cancha.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Las funciones nos ayudan a modelar situaciones en las que debemos expresar una relación entre magnitudes del mismo tipo o de diferentes tipos.

Por ello es importante que identifiques y analices cuáles son las magnitudes relacionadas y cómo varían.

En dos campos agrícolas se hicieron las siguientes ofertas para los recolectores de jitomate:

- Campo A. $165 por jornada diaria de 10 hrs. Con un mínimo de 35 botes de 20 kilos.
- Campo B. $5 por bote de 20 kilos.

Si un recolector ocupa 17 minutos en llenar un bote de 20 kilos, analiza y grafica el comportamiento de las dos propuestas en el tiempo para determinar cuál propuesta conviene más.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra tu proceso de solución y tus reflexiones respecto a qué entiendes por variación.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto te ofrece información respecto a la proporcionalidad y su aprendizaje. Recupera lo que te sirva para argumentar las reflexiones generadas durante tu estudio con los diferentes desafíos.

SOBRE EL APRENDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD[25]

La proporcionalidad juega un rol formativo y transversal en la construcción del pensamiento matemático de los estudiantes y de los ciudadanos en un sentido amplio. Este hecho amerita comenzar con una clara diferenciación

[25] Daniela Reyes-Gasperini, La transversalidad de la proporcionalidad (México: SEP, 2013), 21-25. Recuperado en http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/6586/1/images/transversalidad_smc_baja.pdf (Texto modificado con fines educativos).

entre nociones: fracción, razón, proporción y proporcionalidad, pues si bien son todas ellas afines, su significación y esencia tiene diferencias significativas entre sí, y su distinción permitirá “un acercamiento” los usos y la razón de ser de la proporcionalidad.

Desde su desarrollo matemático más temprano, los estudiantes trabajan con fracciones para expresar una cantidad (numerador) dividida entre otra cantidad (denominador). Ambos, numerador y denominador, deben ser inevitablemente números enteros y el denominador nunca habrá de ser cero, esto es formalmente escrito como sigue:

$$\frac{a}{b};\ a,\ b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0$$

Si bien las fracciones son cocientes de números enteros, la “idea germen” proviene de las relaciones parte-parte y parte-todo. Es decir, al trabajar con fracciones se está trabajando con magnitudes conmensurables, pues pueden interpretarse como partes de una magnitud. Ahora bien, nos preguntamos ¿cómo es que surgió la necesidad de tratar con magnitudes no conmensurables?

Veamos esto mediante un ejemplo partiendo de la definición de conmensurabilidad.

Definición 1
Una magnitud es parte de otra magnitud, la menor de la mayor, cuando aquella mide a la mayor. Equivalentemente, dos magnitudes son conmensurables si existe una magnitud de medida común.

Ejemplo 1
Dos magnitudes lineales, AB y CD son conmensurables si existe una magnitud, MN, que les sirve de unidad a ambas, es decir existen números naturales p, q tales que:

$$AB=p(MN) \text{ y } CD=q(MN)$$

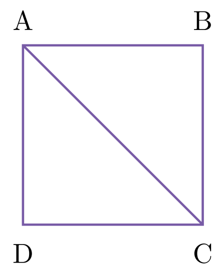
Se dice que una es tantas veces la otra. Por tanto, se puede establecer una proporción:

$$AB:CD :: p:q$$

Veamos esto al nivel de un teorema:

Teorema 1

La diagonal y el lado de un cuadrado son magnitudes inconmensurables.



Demostración.

Sea el cuadrado ABCD, con lado AB y diagonal AC. Para probar que diagonal y lado no tienen una unidad de medida común, se hará la demostración por contradicción.

Supongamos que existe MN. Unidad de medida para ambas magnitudes, AB y AC, por tanto existen números naturales p y q tales que $AB=p(MN)$ y $AC=q(MN)$. De lo cual se sigue.

$$AC:AB :: q:p$$

Por el teorema de Pitágoras $AC^2 = 2(AB^2)$, por tanto $AC/AB = \sqrt{2}$, $q/p = \sqrt{2}$, lo que es una contradicción con la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Ahora bien, si no existe una medida común, ¿cómo se pueden medir estas magnitudes? El problema de medir, fue sustituido en la teoría geométrica euclidiana por el problema de comparar. Este es el posicionamiento fundamental que dio origen a la teoría de las proporciones entre magnitudes.

Este hecho provocó una necesidad, la de introducir la noción de razón, pues esta es la relación entre dos magnitudes: su comparación. De esta manera podemos afirmar que la razón entre la longitud del lado de un cuadrado y la longitud de su diagonal es $\sqrt{2}$, pues no hablamos de una división como en el caso de las fracciones,[26] sino de una relación entre las magnitudes implicadas.

[26] En donde la división de dos números racionales también es un número racional por ser el conjunto cerrado para las cuatro operaciones.

Lo mismo ocurre en el caso de la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, siendo esta relación la constante conocida como π.

Dado que la razón refiere a la relación entre dos magnitudes, así es como puede existir el caso, por ejemplo, de que en un conjunto de personas la cantidad de mujeres respecto a la de hombres sea de 9 a 1, 9:1 (por cada nueve mujeres hay un hombre), o bien, puede ser 9:9, lo que afirma que en ese grupo de personas hay nueve mujeres y nueve hombres, o bien podría ser 9:0, lo cual afirmaría que solo había mujeres en ese grupo.

Esto, si se viera como una fracción no sería válida pues el denominador es cero, sin embargo, dado que es una razón que expresa la relación entre dos magnitudes, si es posible.

Al igual que en los casos anteriores, esta situación también se expresa en el tratamiento de otra constante famosa, la razón áurea, que es expresada como $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ y que representa a la relación entre dos segmentos de una recta que forman la siguiente proporción: "la longitud total $a + b$ es al segmento más largo a, como a es al segmento más corto b, es decir, $a + b : a :: a : b$".

Hasta aquí, podemos evidenciar tres diferencias importantes entre las nociones de fracción y de razón. Las dos primeras concernientes a restricciones numéricas y de notación: en primer lugar, las razones al ser una relación entre dos magnitudes no tienen la restricción de ser la división entre dos números enteros (ver el caso del numerador de la razón áurea en donde uno el numerador es un número irracional) que da como resultado un número racional (ver el caso de la circunferencia en donde la relación entre longitud y diámetro es un numero irracional). En segundo lugar, al no tratarse de una división entre dos números, no es necesaria la restricción realizada sobre el "denominador", pues la razón no es una fracción (ver el caso de la relación entre hombres y mujeres de un conjunto de personas). La tercera y para nosotros la más relevante, es la esencia por la cual se han desarrollado ambos conceptos matemáticos: la fracción es la expresión de una cantidad (numerador) dividida entre otra cantidad (denominador) que representa la relación parte–parte o parte-todo de un conjunto, mientras que la razón surge ante la imposibilidad de medir todas las magnitudes (surge la idea de la inconmensurabilidad).

Se desarrolla entonces la idea de relación entre magnitudes, por tanto, la notación introducida en la matemática escolar para referirse a la razón como una fracción sin las argumentaciones contextualizadas correspondientes a su construcción, produce entre la mayoría de los estudiantes una ausencia de significación, en consecuencia, una falta de comprensión del concepto matemático y los procesos asociados, por tanto se produce una reducción del aprendizaje al nivel del desarrollo de habilidades básicas, como el manejo de algoritmos sin significado para los estudiantes. Es decir, el propio discurso Matemático Escolar impide el aprendizaje de los estudiantes, o lo limita a la algoritmia y la memoria.

Si bien, a medida que se progrese en el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes, se comenzará también a simplificar procedimientos y las argumentaciones, sigue siendo necesario, en nuestra opinión, el introducir dichos saberes a partir de situaciones más vivenciales que les permitan tratar las diferentes argumentaciones posibles, así como sus usos y la razón de ser de dicho saber. Un ejemplo de los rituales didácticos no significativos que consideramos equivalente es aquello que ocurre con las situaciones de "despeje de la x", ahí aparecen frases del tipo "lo que está sumando pasa restando", soslayando la noción de la Ley Uniforme[27] y generando en los estudiantes una sensación de magia matemática, más que estructura y argumentación matemática.

Ahora bien, la noción de proporción, como hemos ejemplificado anteriormente, aparece cuando se trabaja con dos pares de relaciones numéricas que se corresponden, de donde devienen las propiedades de las proporciones, por ejemplo, la igualdad del producto cruzado de los numeradores y denominadores (expresados como fracciones), o bien, cualquier reacomodación posible de la igualdad planteada $a/b = c/d$.

Por último, se llaman proporcionales a las magnitudes que guardan la misma razón, es decir, no se habla de la igualdad entre dos razones (idea aritmética),

[27] Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica, la ecuación que resulta es equivalente a la dada. Si se multiplica o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número, distinto de cero, la ecuación resultante es equivalente a la dada.

sino que se está hablando de la relación que se mantiene constante entre dos magnitudes (idea variacional). Sobre la proporcionalidad, como se dijo al comienzo de este escrito, existe un gran bagaje de investigaciones.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso anotando las aportaciones del texto que consideras te ayudan en la argumentación de tus afirmaciones.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

¿Conoces a Leonardo da Vinci? Fue un gran artista italiano, que entre otras cosas, se destacó por ser un gran pintor. Era muy perseverante en sus estudios sobre el cuerpo humano. El siguiente texto[28] es muestra de ello y tiene que ver con la importancia de la proporción:

As he measured and drew human bodies, Leonardo noticed that we generally have standard proportions. He noted that "the span of a man's outstretched arms is equal to his height." Other observations he noted about human proportions:

- In an adult, the head is one-eighth of the person's height.
- The face is divided into three equal parts—from the chin to the nostrils, from the nostrils to the eyebrows, and from the eyebrows to the hairline.
- The distance across the face from one ear to another is the same as that from the eyebrows to the chin.
- The ear is as long as the nose.
- The length of the forearm up to the elbow is one fourth of the body's height.

[28] Excerpted from Leonardo da Vinci for Kids by Janis Herbert. Copyright © 1998 by Janis Herbert. Reprinted by permission of Chicago Review Press".

- The foot is one-half as long as the distance from the heel to the knee.
- The distance from the elbow to the wrist is one-half the length of the thighbone.

Now is your chance to test Leonardo's observations and maybe make some of your own.

Spread several sheets of newspaper on the floor so that it is longer and wider than you are. Tape them together. Lay down on the paper with your arms held out away from your body and have a friend draw the outline of your body with a black marker on the paper.

Measure the different parts of your body and see if they fit into the general proportions that Leonardo noted. Have your friend measure the parts of your face to see if those proportions Leonardo noted are true.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra con detalle tus aprendizajes de la lengua inglesa y tus reflexiones. Enlista los aspectos de la proporcionalidad que descubriste con este texto.

REVISA TU AVANCE

Enlista tus aprendizajes correspondientes a proporcionalidad y funciones y pide a tu LEC que te ayude a revisar el trayecto del tema. Esto te permitirá reconocer cuál es tu avance y qué puedes trabajar en otro momento.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Usas diferentes lenguajes como formas de expresión para comunicar y representar tus experiencias personales. Construyes objetos. Elaboras patrones, categorías y clasificaciones.	Identificas relaciones entre objetos y elementos de tu entorno y comunicas tus observaciones y opiniones.	Identificas relaciones simples en tablas o gráficas sencillas entre magnitudes conocidas. Comunicas tus observaciones.	Resuelves problemas que impliquen trabajo con tablas de proporcionalidad para dotar de sentido a las tablas de multiplicar. Comunicas tus reflexiones.	Interpretas la relación entre magnitudes y entre números y las usas en la solución de problemas con contextos familiares. Comunicas tus reflexiones y explicaciones.	Resuelves problemas que impliquen el trabajo con tablas de proporcionalidad mediante la multiplicación y la división. Comunicas tus reflexiones y explicaciones.	Resuelves problemas que impliquen identificar la relación directa o inversa entre magnitudes, diferenciando la expresión fraccionaria de la correspondiente razón entre magnitudes.	Resuelves problemas que impliquen el porcentaje de cantidades y el interés simple. Comunicas tus explicaciones y argumentaciones.	Resuelves problemas que implican la variación directa o inversa de magnitudes, como el comportamiento del área de una figura al incrementar o disminuir sus dimensiones.	Resuelves problemas que impliquen la construcción y análisis de escalas y semejanzas. Comunicas tus reflexiones, razonamientos y argumentaciones.	Analizas y utilizas distintas representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) correspondientes a una relación de proporcionalidad directa o inversa para resolver problemas del mundo real.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

Herbert, Janis. Excerpted from ***Leonardo da Vinci for Kids*** by Janis Herbert. Copyright ©. Reprinted by permission of Chicago Review Press. ***Leonardo da Vinci for kids***, Illinois: Chicago Review Press, 1998. Recuperado de http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/vinci-for-kids.pdf

Reyes-Gasperini, Daniela. ***La transversalidad de la proporcionalidad,*** México: SEP, 2013. http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/6586/1/images/transversalidad_smc_baja.pdf

ANALICEMOS EL DATO

ANÁLISIS Y PRESENTACIÓN DE DATOS

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

¿Te has dado cuenta que los medios de comunicación presentan información a través de gráficas o tablas? ¿Sabes cuáles son las ventajas de presentar así la información? ¿Has tenido la experiencia de interpretar información representada en tablas o gráficas?

La estadística es una disciplina que se ocupa de los métodos y los procedimientos para recoger, clasificar, resumir, encontrar regularidades y analizar datos; también sirve para hacer inferencias para ayudar a la toma de decisiones y formular predicciones. Tiene una larga historia que se remonta incluso hasta los babilonios y en la actualidad tiene numerosos usos en nuestra vida cotidiana. En esta Unidad de Aprendizaje abordarás herramientas de que te ayudarán en el manejo y la interpretación de información y el uso de tablas y gráficas, a través de estudiar lo siguiente:

MANEJO DE LA INFORMACIÓN

- Análisis y presentación de datos.
- Lectura de información representada en gráficas provenientes de diarios y revistas y de otras fuentes.
- Lectura de información contenida en gráficas de barras.
- Análisis de las convenciones para la construcción de gráficas.
- Extraer información de tablas o gráficas de barras y aplicación de fórmulas de estadísticas.

PROPÓSITO GENERAL

Valoraremos el tratamiento y análisis de la información para comprender y resolver situaciones del mundo real y argumentar nuestras propuestas y decisiones.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Identificaremos información en tablas para responder y formular preguntas correspondientes a temas, situaciones o fenómenos familiares.
- Analizaremos temas, situaciones o fenómenos de nuestro contexto local y nacional mediante la recopilación, organización y tratamiento de información correspondiente.
- Reconoceremos el uso de las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) para analizar información y comunicar nuestras opiniones, propuestas y decisiones.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Los datos siguientes corresponden a las estaturas de los estudiantes del centro educativo de Guerachi: 1.49, 1.57, 1.55, 1.56, 1.54, 1.55, 1.58, 1.57, 1.56, 1.60, 1.53, 1.57, 1.54, 1.52, 1.55, 1.58, 1.56, 1.55, 1.55, 1.51, 1.53, 1.56, 1.52, 1.56, 1.55, 1.54, 1.55, 1.53, 1.56, 1.55.

Predice cuál sería la estatura de un estudiante elegido al azar.

- ¿Cuál es la estatura promedio de los estudiantes del centro educativo de Guerachi?
- ¿Cómo representarías la información para comunicar tus observaciones?
- ¿Cuál es la estatura promedio en tu centro educativo?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Anota en tu registro de proceso de aprendizaje la forma como resolviste el problema y lo que aprendiste. Describe lo que entiendes por medidas de tendencia central y por representación gráfica.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío es importante que organices la información y recuerdes o investigues qué es el porcentaje de una cantidad, cómo se calcula y cómo se puede representar.

La comunidad de San Antonio Analco, del estado de Oaxaca, está conformada por 25 familias que suman un total de 300 habitantes. La distribución por edad y género es la siguiente: 10% niñas de 0 a 8 años, 13% niños de 0 a 8 años, 18% mujeres de 9 a 17 años, 12% hombres de 9 a 17 años, 19% mujeres de 18 a 60 años, 20% hombres de 18 a 60 años, y el resto son adultos mayores.

- ¿Qué puedes decir de la población de San Antonio Analco, la mayoría son adultos o son jóvenes y niños?
- ¿Quiénes son más, los habitantes de género masculino o los de género femenino?
- ¿Qué diferencia hay entre la cantidad de personas de 0 a 8 años y la cantidad de adultos mayores?

Representa gráficamente los datos para comunicar tus observaciones y opiniones.

Y tú, ¿sabes cómo es la población que conforma tu comunidad? ¿Qué otra característica te gustaría conocer de tu comunidad? ¿Cómo representarías los datos?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro de proceso de aprendizaje, detallando tu proceso de solución y resaltando los nuevos aprendizajes respecto al tratamiento de la información.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente desafío te presenta información mediante una gráfica de barras. Te recomiendo que observes los detalles e identifiques que información te proporciona cada uno.

Analiza la gráfica y determina cuál es el tema y qué información ofrece.[29]

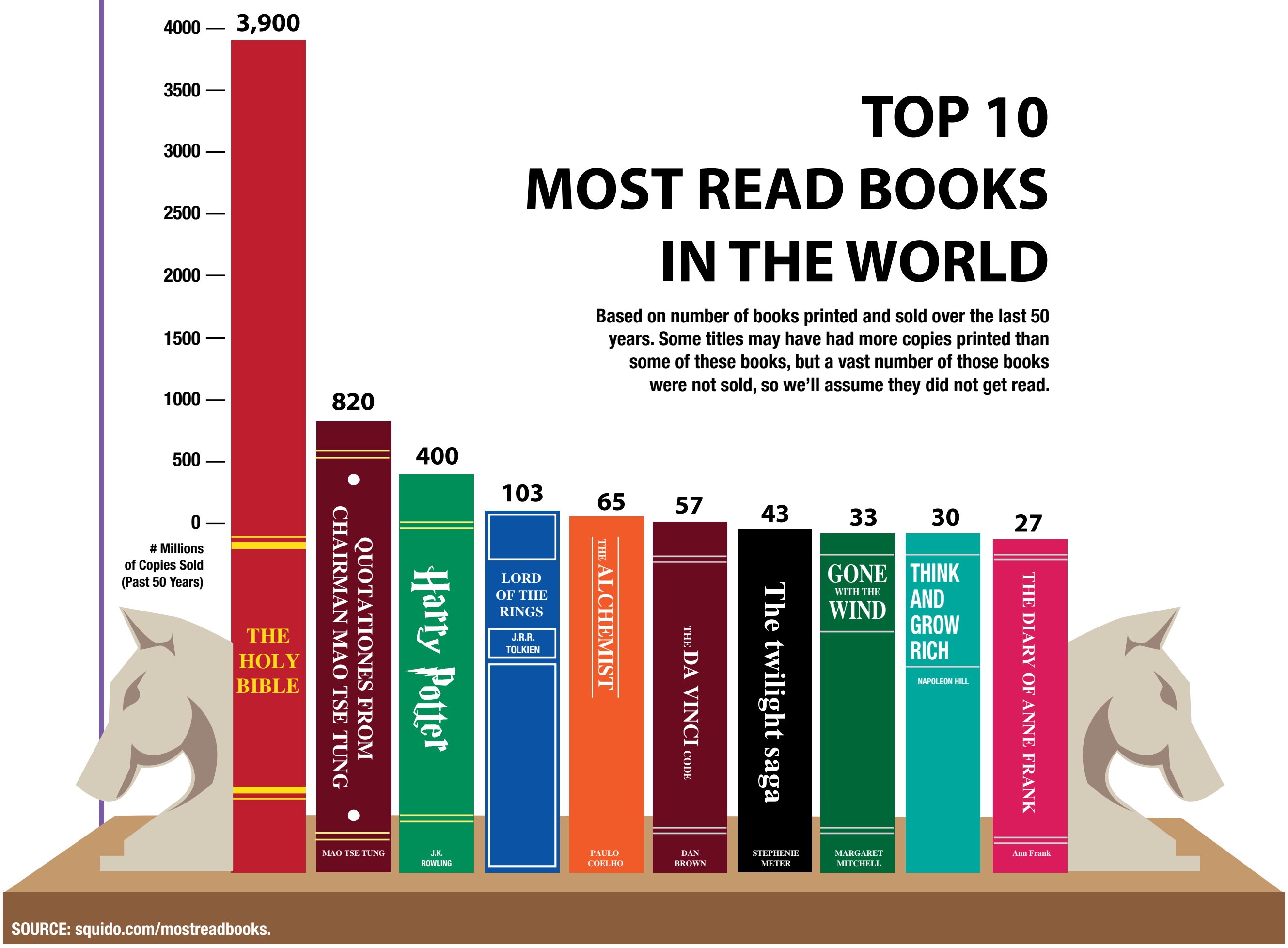


Ilustración: © Javier Velázquez

[29] James V. Chapman. *10 Most Read Books In The World.* Updated on March 20, 2015, http://hubpages.com/literature/mostreadbooks (Fecha de consulta: 19 de mayo de 2016).

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Describe en tu cuaderno tu proceso y tus observaciones. No olvides anotar los elementos de las gráficas y del análisis, tratamiento y representación de la información que aprendiste con este desafío.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente desafío presenta la información organizada en una tabla. Es importante que observes cada elemento que la integra y analices qué información te ofrece cada uno.

Explica cuál es el tema que se presenta en la siguiente tabla. ¿Qué puedes inferir al respecto de las preferencias de lectura?[30]

PREFERENCIAS DE LECTURA POR GÉNERO

TIPO DE LIBROS	HOMBRES	MUJERES	TIPO DE REVISTAS	HOMBRES	MUJERES
Biografías	16.3	11.3			
Científicos-técnicos	32.8	140	Científico, técnicas, computación	35.7	13.5
Cocina	12.6	19.4	Deportivas	70	28
Cuento	49.8	55.7	Espectáculos	24.9	55.7
Historia	41	25.6	Salud, belleza, cocina	4.2	49
Novela	23.7	60.2	Sociales	6.7	11.3
Poesía	23.8	39.5	Periódico, secciones		
Política	5	3.4	Cultura	15.3	23.1
Religión	8.3	4.4	Deportes	69.6	35.9
Superación personal	21.5	31.9	Espectáculos	28.1	56.3
			Policiaca	15.2	7.6
			Sociales	7.5	16.6

[30] Mayela Eugenia Villalpando Aguilar, "Consumo cultural del libro y la lectura en estudiantes de secundaria en Jalisco" (REDIE. Revista *Electrónica de Investigación Educativa,* vol. 16, núm. 3, 2014), 54-70. http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/deed.es (Fecha de consulta: 19 de mayo de 2016).

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

El texto que te presento a continuación proporciona información que te ayudará a formalizar algunas de las estrategias que utilizaste en los desafíos anteriores para planear, recabar, organizar y analizar el trabajo estadístico para comprender fenómenos o situaciones naturales y sociales.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Describe en tu registro de proceso de aprendizaje qué elementos conforman una tabla para representar información estadística y detalla y argumenta tus inferencias.

ESTADÍSTICAS DESCRIPTIVAS E INFERENCIALES[31]

Cuando primero se le presenta a usted un conjunto de mediciones, ya sea una muestra o una población, necesita encontrar una forma de organizarlo y resumirlo. La rama de la estadística que presenta técnicas para describir conjuntos de mediciones se denomina estadística descriptiva. El lector ha visto estadísticas descriptivas en numerosas formas: gráficas de barras, gráficas de pastel y gráficas de líneas presentadas por un candidato político; tablas numéricas en el periódico; o el promedio de cantidad de lluvia informado por el pronosticador del clima en la televisión local. Las gráficas y resúmenes numéricos generados en computadoras son comunes en nuestra comunicación de todos los días.

La estadística descriptiva está formada por procedimientos empleados para resumir y describir las características importantes de un conjunto de mediciones. Si el conjunto de mediciones es toda la población, solo es necesario sacar conclusiones basadas en la estadística descriptiva. No obstante, podría ser demasiado costoso o llevaría demasiado tiempo

[31] William Mendenhall, Robert J. Beaver y Barbara M. Beaver. *Introducción a la estadística y probabilidad* (México: Cengage Learning, 2010).

enumerar toda la población. Quizá enumerar la población la destruiría, como en el caso de la prueba de "tiempo para falla". Por éstas y otras razones, quizá el lector solo tenga una muestra de la población que, al verla, usted desee contestar preguntas acerca de la población en su conjunto. La rama de la estadística que se ocupa de este problema se llama estadística inferencial.

La estadística inferencial está formada por procedimientos empleados para hacer inferencias acerca de características poblacionales, a partir de información contenida en una muestra sacada de esta población. El objetivo de la estadística inferencial es hacer inferencias (es decir, sacar conclusiones, hacer predicciones, tomar decisiones) acerca de las características de una población a partir de información contenida en una muestra.

ALCANZAR EL OBJETIVO DE ESTADÍSTICAS INFERENCIALES

Los pasos necesarios[32]

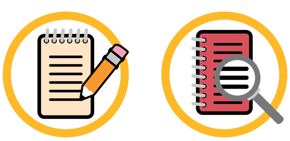
¿Cómo puede hacer inferencias acerca de una población utilizando información contenida en una muestra? La tarea se hace más sencilla si el lector se entrena para organizar el problema en una serie de pasos lógicos.

1. Especifique las preguntas a contestar e identifique la población de interés. En la encuesta de elección presidencial, el objetivo es determinar quién obtendrá más votos el día de la elección. Por lo tanto, la población de interés es el conjunto de todos los votos en la elección presidencial. Cuando usted selecciona una muestra, es importante que la muestra sea representativa de esta población, no la población de preferencias de votantes del 5 de julio o en algún otro día antes de la elección.
2. Decida cómo seleccionar la muestra. Esto recibe el nombre de "diseño del experimento o procedimiento de muestreo". ¿La muestra es representativa de la población de interés? Por ejemplo, si una muestra de votantes registrados se selecciona del estado de Arkansas, ¿esta muestra será representativa de todos los votantes de Estados Unidos?

[32] William Mendenhall, Robert J. Beaver y Barbara M. Beaver. *Introducción a la estadística y probabilidad,* (México: Cengage Learning, 2010).

¿Será lo mismo que una muestra de “probables votantes”, es decir, aquellos que es probable que en realidad voten en la elección? ¿La muestra es lo suficientemente grande para contestar las preguntas planteadas en el paso 1 sin perder tiempo y dinero en información adicional? Un buen diseño de muestreo contestará las preguntas planteadas, con mínimo costo para el experimentador.

3. Seleccione la muestra y analice la información muestra. Sin importar cuánta información contenga la muestra, el lector debe usar un método de análisis apropiado para extraerla. Muchos de estos métodos, que dependen del procedimiento de muestreo del paso 2, se explican en el texto.
4. Use la información del paso 3 para hacer una inferencia acerca de la población. Es posible usar muchos procedimientos diferentes para hacer esta inferencia y algunos son mejores que otros. Por ejemplo, podría haber 10 métodos diferentes para estimar la respuesta humana a un medicamento experimental, pero un procedimiento podría ser más preciso que los otros. Usted debe usar el mejor procedimiento disponible para hacer inferencias (muchos de estos se explican en el texto).
5. Determine la confiabilidad de la inferencia. Como usted está usando solo una parte de la población para sacar las conclusiones descritas en el paso 4, ¡podría estar en un error! ¿Cómo puede ser esto? Si una agencia realiza una encuesta estadística para usted y estima que el producto de su compañía ganará 34% del mercado este año, ¿cuánta confianza puede usted poner en esta estimación? ¿Es precisa a no más de 1.5 o a 20 puntos porcentuales? ¿Es confiable lo suficiente para establecer metas de producción? Toda inferencia estadística debe incluir una medida de confiabilidad que dice cuánta confianza tiene usted en la inferencia.



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

A partir de la lectura, registra qué información te ayuda.

REVISA TU AVANCE

Al finalizar tu estudio, te invitamos a revisar el listado de los aprendizajes que obtuviste al término de la unidad. Con ello podrás hacer una valoración de tus avances. Recuerda que estos aprendizajes los fuiste enlistando a lo largo de tu registro de proceso de aprendizaje. Con ayuda de tu LEC revisen el trayecto del tema para conocer tu avance y lo que te faltaría por abordar.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

Nivel	Núm.	Aprendizaje
INICIAL	1	Usas diferentes lenguajes, como formas de expresión para representar y comunicar información de lo que sucede a tu alrededor. Elaboras patrones, categorías y clasificaciones.
BÁSICO	2	Identificas información en diferentes instrumentos y observas que la información se utiliza para diversos propósitos.
	3	Identificas el uso de números para interpretar y dar a conocer información.
	4	Resuelves problemas que impliquen identificar información representada en tablas.
INTERMEDIO	5	Resuelves problemas que impliquen identificar información en gráficas de barras y circulares.
	6	Resuelves problemas que implican construir gráficas a partir de la información proporcionada en tablas. Comunicas tus reflexiones.
	7	Reconoces términos básicos, como población, muestra y variable para analizar información estadística. Comunicas tus opiniones utilizando algunos términos elementales de estadística.
	8	Recopilas datos de eventos del mundo real, los organizas y representas en tablas y gráficas para analizar la información y comunicar tus opiniones.
AVANZADO	9	Comparas cualitativamente búsqueda de información al analizar los recursos que se utilizan para presentarla.
	10	Manejas de manera eficiente las medidas de tendencia central de un conjunto de datos agrupados y comunicas la información mediante polígonos de frecuencia. Utilizas la información para argumentar tus decisiones.
	11	Diseñas y realizas un estudio estadístico, desde la planificación hasta la presentación de resultados, utilizando gráficas poligonales y diagramas de caja-brazos para inferir y tomar decisiones personales.

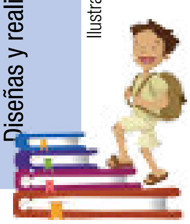


Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

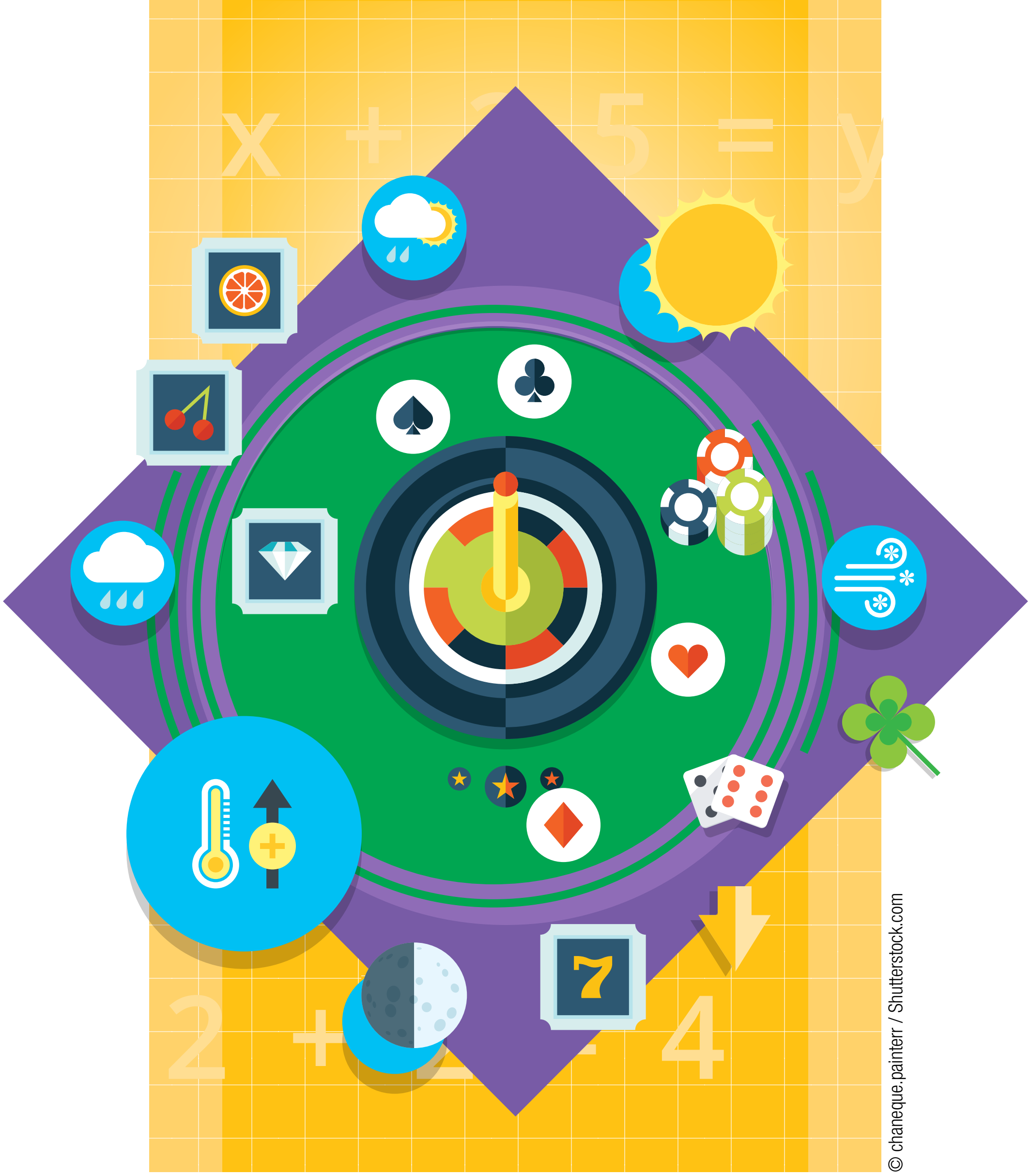
Aguilar, Mayela Eugenia Villalpando. "Consumo cultural del libro y la lectura en estudiantes de secundaria en Jalisco". *En Revista electrónica de investigación educativa*, 54-70, 2014.

Conafe. *Unidad de aprendizaje independiente, bloque 4, primer grado.* México: Conafe, 2014.

Chapman, James V. 10 Most Read Books In The World. Updated on March 20, 2015.

http://hubpages.com/literature/mostreadbooks (Fecha de consulta: 19 de mayo de 2016)

Mendenhall, William, Robert J. Beaver y Barbara M. Beaver. *Introducción a la estadística y probabilidad.* México: Cengage Learning, 2010.



ÁGUILA O SOL

NOCIONES DE PROBABILIDAD

PARA INICIAR

Inicia tu registro de proceso de aprendizaje reflexionando y describiendo por qué te interesa estudiar el tema y qué es lo que te gustaría aprender.

PRESENTACIÓN DEL TEMA

En la vida cotidiana suceden eventos los cuales tomamos para jugar o resolver problemas que sin pensarlo van desarrollando nuestras habilidades para enfrentar nuevos desafíos en nuestra misma comunidad. Por ejemplo, en el juego de los volados, cuántas veces podrá una moneda caer del lado del águila, un ave cuántas veces se parará en el mismo lugar, o si un rayo podrá caer en el mismo lugar, o cuando las personas despiertan cuál ojo abren primero, y así sucesivamente con otros eventos que son divertidos y con ello a la vez podemos aprender a observar nuestro medio. Estas y otras situaciones nos facilitan la manera de resolver los problemas.

En esta unidad estudiarás fenómenos o experimentos como los anteriores, fenómenos o experimentos que, aun cuando se realicen o sucedan varias veces en las mismas condiciones el resultado no siempre es el mismo. Se les denomina fenómenos o experimentos aleatorios. En el siguiente esquema podrás identificar como está conformado el tema en relación a los conceptos que son posibles de tratar con el estudio a profundidad de la Unidad.

MANEJO DE LA INFORMACIÓN

Nociones de probabilidad.		Fenómenos y experimentos aleatorios.
Espacio muestral.	Eventos equiparables y no equiparables.	Probabilidad clásica.
Probabilidad frecuencial.	Diagrama de árbol.	Simulaciones.

PROPÓSITO GENERAL

Reconoceremos la importancia de la probabilidad para comprender, interpretar y analizar información correspondiente a un fenómeno o situación, con la finalidad de predecir comportamientos y tomar decisiones.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

- Formularemos opiniones y predicciones a partir de conocer información a través de tablas, gráficas y experimentos sencillos de azar.
- Reconoceremos las características de fenómenos y experimentos aleatorios para explicar y comunicar nuestras predicciones y opiniones.
- Utilizaremos la relación entre probabilidad frecuencial y probabilidad teórica, así como la probabilidad de eventos equiprobables y no equiprobables, para argumentar nuestras predicciones y opiniones.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El desafío que te presento es una oportunidad para adentrarse en el estudio de la probabilidad, te recomiendo identificar los datos que te ofrece y seleccionar cuáles son relevantes para responder lo que se pide.

La comunidad de Lago Grande tiene 150 habitantes, de los cuales 60 son mujeres mayores de 15 años, 40 son hombres mayores a 15 años. Para conformar el comité organizador van a elegir al azar a 10 personas mayores a 15 años. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité esté conformado por la misma cantidad de mujeres y hombres?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Recupera en tu registro de proceso de aprendizaje la experiencia detallada que viviste al trabajar con este desafío. Anota tus reflexiones respecto al apoyo que la probabilidad te ofrece para construir tus opiniones y tomar decisiones.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para el siguiente desafío es necesario que identifiques el experimento que se propone y las preguntas que se hacen y analices e investigues qué elementos de la probabilidad te ayudan a describir los posibles resultados de un experimento y la ocurrencia de un evento.

Los estudiantes del centro educativo lanzaron una moneda y un dado al aire y cada uno anotó lo que consideraba sería el resultado, ¿Cuáles son los posibles resultados de este experimento? ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea águila y un número par?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Anota en tu registro lo que hiciste para conocer el resultado y qué es lo que entiendes por espacio muestral y cuál es la diferencia entre experimento y evento.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

En el siguiente desafío tienes la oportunidad de predecir resultados, pon atención en identificar si la ocurrencia de eventos distintos es la misma o no, es decir, si son equiprobables o no equiprobables.

Dibuja una carretera de 1 m dividida en 10 dm. Coloca doce carritos numerados del 1 al 12, en la línea de salida, cada carrito en un carril. Para que los coches avancen, lanza dos dados y suma los puntos, el coche cuyo número sea la suma obtenida, avanza un decímetro.

Gana el carrito que avance más después de 10 tiradas. Puedes jugarlo a 20, 30 o el número de tiradas que decidas. Anticipa, ¿qué carrito ganará?

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Continúa tu registro, anotando con detalle tu proceso de aprendizaje y tus reflexiones respecto a lo que entendiste respecto a los eventos equiprobables y los no equiprobables, probables y no probables; así como tus reflexiones y aprendizajes respecto a la probabilidad frecuencial o empírica.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente desafío muestra el modelo clásico de urnas para experimentos aleatorios, el cual tiene la ventaja de poder desarrollarse en cualquier espacio y momento. Te recomiendo que realices y analices con cuidado cada evento.

Consigue pelotas o haz bolas con papel, píntalas de tal manera que queden de la siguiente manera: 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes, colócalas en una urna o una bolsa opaca.

1. ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable?
2. Sea roja.
3. Sea verde.
4. Sea amarilla o verde.
5. No sea roja.
6. No sea amarilla.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Describe en tu registro de proceso de aprendizaje tu experiencia con este desafío y reflexiona respecto a situaciones que pueden simularse con este modelo de urnas.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

Para la lectura y aprovechamiento del siguiente texto te recomiendo que avances poco a poco, analizando los ejemplos y contextualizando con otros experimentos que conozcas.

PROBABILIDAD[33]

Páginas 5 y 6

En esta primera mitad del curso estudiaremos algunos conceptos elementales de la teoría matemática de la probabilidad. Esta teoría tuvo como uno de sus primeros puntos de partida el intentar resolver un problema particular concerniente a una apuesta de juego de dados entre dos personas. El problema al que nos referimos involucraba una gran cantidad de dinero y puede plantearse de la siguiente forma:

- Dos jugadores escogen cada uno de ellos un número del 1 al 6, distinto uno del otro, y apuestan 32 doblones de oro a que el número escogido por uno de ellos aparece en tres ocasiones antes que el número del contrario al lanzar sucesivamente un dado. Suponga que el número de uno de los jugadores ha aparecido dos veces y el número del otro una sola vez. ¿Cómo debe dividirse el total de la apuesta si el juego se suspende?

- Uno de los apostadores, Antonio de Gombaud, popularmente conocido como el caballero De Mere, deseando conocer la respuesta al problema plantea a Blaise Pascal (1623-1662) la situación. Pascal a su vez consulta con Pierre de Fermat (1601-1665) e inician un intercambio de cartas a propósito del problema. Esto sucede en el año de 1654. Con ello se inician algunos esfuerzos por dar solución a este y otros problemas similares que se plantean. Con el paso del tiempo se sientan las bases y las experiencias necesarias para la búsqueda de una teoría matemática que sintetice los conceptos y los métodos de solución de los muchos problemas particulares resueltos a lo largo de varios años.

[33] Luis Rincón. Curso intermedio de probabilidad (Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Unam, 2006), 5-12.

En el segundo congreso internacional de matemáticas, celebrado en la ciudad de París en el año 1900, el matemático David Hilbert (1862-1943) plantea 23 problemas matemáticos de importancia. Uno de estos problemas es el de encontrar axiomas o postulados a partir de los cuales se pueda construir una teoría matemática de la probabilidad. Aproximadamente treinta años después, en 1933, el matemático ruso A. N. Kolmogorov (1903-1987) propone ciertos axiomas que a la postre resultaron adecuados para la construcción de una teoría de la probabilidad. Esta teoría prevalece hoy en día y ha adquirido el calificativo de teoría clásica.

Actualmente la teoría clásica de la probabilidad se ha desarrollado y extendido enormemente gracias a muchos pensadores que han contribuido a su crecimiento, y es sin duda una parte importante y bien establecida de las matemáticas. Ha resultado útil para resolver problemas puramente matemáticos, pero sobre todo y principalmente, para modelar situaciones reales o imaginarias, en donde el azar es relevante.

Página 7

La teoría de la probabilidad es la parte de las matemáticas que se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Por experimento aleatorio entenderemos todo aquel experimento que cuando se le repite bajo las mismas condiciones iniciales, el resultado que se obtiene no siempre es el mismo. El ejemplo más sencillo y cotidiano de un experimento aleatorio es el de lanzar una moneda o un dado, y aunque estos experimentos pueden parecer muy sencillos, algunas personas los utilizan para tomar decisiones en sus vidas. En principio no sabemos cuál será el resultado del experimento aleatorio, así que por lo menos conviene agrupar en un conjunto a todos los resultados posibles. El espacio muestral (o espacio muestra) de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, y se le denota generalmente por la letra griega Ω *(omega)*. En algunos textos se usa también la letra S para denotar al espacio muestral. Esta letra proviene del término sampling space de la lengua inglesa equivalente a espacio muestral. Llamaremos evento a cualquier subconjunto del espacio muestral y denotaremos a los eventos por las primeras letras del alfabeto en mayúsculas: $A, B, C,$ etc.

Ejemplo. Si un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior, entonces claramente el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como ejemplo de un evento para este experimento podemos definir el conjunto $A = \{2, 4, 6\}$, que corresponde al suceso de obtener como resultado un número par.

Si al lanzar un dado una vez obtenemos el número *"4"*, decimos entonces que se observó la ocurrencia del evento $A = \{2, 4, 6\}$, y si se obtiene por ejemplo el resultado *"1"* decimos que no se observó la ocurrencia del evento A.

Página 12

Probabilidad

La probabilidad de un evento A, es un número real en el intervalo [0, 1] que denotaremos por $P(A)$, y representa una medida de la frecuencia con la que se observa la ocurrencia del evento A cuando se efectúa el experimento aleatorio en cuestión. Existen al menos cuatro[34] definiciones de probabilidad que explicamos a continuación.

Probabilidad clásica

Sea A un subconjunto de un espacio muestral de cardinalidad finita. Se define la probabilidad clásica del evento A como el cociente:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}},$$

en donde el símbolo $\#A$ denota la cardinalidad o número de elementos del conjunto A. Claramente esta definición es sólo válida para espacios muéstrales finitos, pues forzosamente necesitamos suponer que el número de elementos es finito. Además, el espacio debe ser equiprobable, pues para calcular la probabilidad de un evento A, únicamente necesitamos contar cuántos elementos tiene A respecto del total, sin importar exactamente qué elementos particulares sean. Por lo tanto, esta definición de probabilidad presupone que todos los elementos son igualmente probables o tienen el mismo peso. Este es el caso por ejemplo de un dado equilibrado. Para este

[34] En el fragmento seleccionado solo se abordan dos de las cuatro. La probabilidad subjetiva y la probabilidad axiomática se describen de la página 14 a la 19 de la bibliografía correspondiente.

experimento el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y si deseamos calcular la probabilidad (clásica) del evento A correspondiente a obtener un número par, es decir $A = \{2, 4, 6\}$, entonces:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad frecuentista

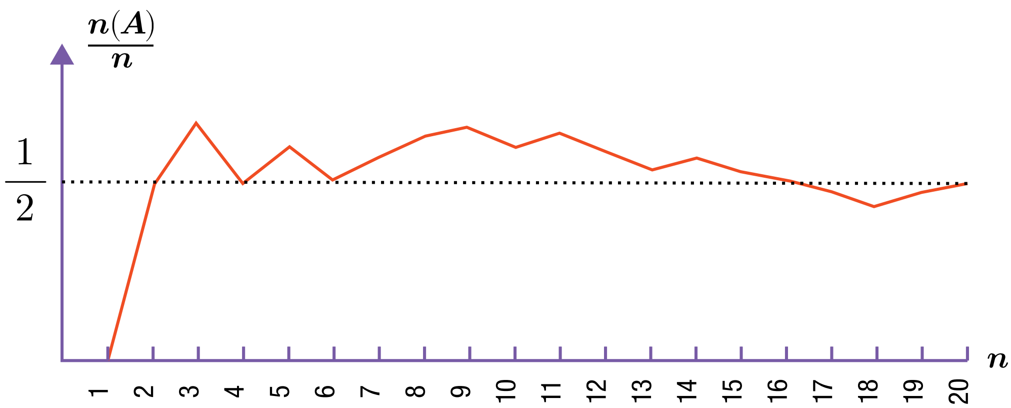
Supongamos que realizamos n veces un cierto experimento aleatorio y sea A un evento cualquiera. Denotemos por n(A) el número de ocurrencias del evento A, en las n realizaciones del experimento. Se define entonces la probabilidad frecuentista de A como indica el siguiente límite:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}}$$

En este caso, debemos hacer notar que no es humanamente posible llevar a cabo una infinidad de veces el experimento aleatorio, de modo que en la práctica no es posible encontrar mediante este mecanismo la probabilidad de un evento cualquiera. Esta limitación hace que esta definición de probabilidad no sea enteramente formal, pero tiene algunas ventajas. Veamos un ejemplo concreto. Consideremos nuevamente el experimento aleatorio de lanzar un dado equilibrado y registrar la ocurrencia del evento A definido como el conjunto $\{2, 4, 6\}$. Después de lanzar el dado 20 veces obtuvimos los siguientes resultados:

NÚM.	RESULTADO	$n(A)/\ n$
1	3	0/1
2	6	1/2
3	2	2/3
4	1	2/4
5	4	3/5
6	6	4/6
7	3	4/7
8	4	5/8
9	2	6/9
10	5	6/10
11	2	7/11
12	5	7/12
13	1	7/13
14	6	8/14
15	3	8/15
16	1	8/16
17	5	8/17
18	5	8/18
19	2	9/19
20	6	10/20

En la siguiente gráfica se muestra el singular comportamiento de este cociente a lo largo del tiempo, al principio se pueden presentar algunas oscilaciones pero eventualmente el cociente se estabiliza en un cierto número. Realizando un mayor número de observaciones del experimento, no es difícil creer que el cociente n(A)/n se estabiliza en $1/2$ cuando n es grande y el dado es equilibrado. Se invita al lector intrigado a efectuar un experimento similar y corroborar esta interesante regularidad estadística con este o cualquier otro experimento aleatorio de su interés.



Regularidad estadística del cociente $\dfrac{n(A)}{n}$

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Registra los aportes a tu aprendizaje a partir de la lectura y análisis del texto.

ACEPTA EL DESAFÍO Y CONSTRUYE COMPRENSIONES

El siguiente texto presenta un análisis de la probabilidad de ganar en la lotería nacional.

THE CHANCES OF WINNING THE UK NATIONAL LOTTERY[35]

- The Jackpot - 6 Numbers (Typical prize pool: Sat - £5m, Wed - £3m) 6 numbers are drawn at random from the set of integers between 1 and 49, which means there are 49!/(6!*(49-6)!) combinations of numbers (the draw order doesn't matter). This means that the jackpot chance is 1 in 13,983,816 or approximately 1 in 14 million.

- 5 Numbers + The Bonus Number (Typical prize: £50,000) You are still matching 6 numbers from the 1 to 49 set as above, but you can now do it in 6 different ways (by dropping each of the main numbers in turn), therefore the chance is 1 in 13,983,816/6, which works out as 1 in 2,330,636.

- 5 Numbers (Typical prize: £1,500) This is 42 times more likely than getting 5 numbers + the bonus number because, after the first six balls are drawn, there are 43 balls left and you can match 42 of these 43 balls without matching the bonus number. Therefore the chance is 1 in 2,330,636/42, which evaluates to 1 in 55,491.33333.

- 4 Numbers (Typical prize: £100) Firstly, let's take the case of the first 4 of your numbers matching and the last 2 not matching. In this single case (where each set of chances relies on the previous event occurring):

[35] Richard K. Lloyd, The Chances of Winning the UK National Lottery, http://lottery.merseyworld.com/Info/Chances.html (Fecha de consulta: 25 de enero de 2016).

- The chance that your 1st number matches a winning number is 1 in 49/6.
- The chance that your 2nd number matches a winning number is 1 in 48/5.
- The chance that your 3rd number matches a winning number is 1 in 47/4.
- The chance that your 4th number matches a winning number is 1 in 46/3.
- The chance that your 5th number doesn't match a winning number is 1 in 45/(45-2) [because there are still 2 unmatched winning numbers].
- The chance that your 6th number doesn't match a winning number is 1 in 44/(44-2) [yes, still 2 unmatched winning numbers].
- Now you need to accumulate all those chances by multiplying them together: 1 in (49/6)*(48/5)*(47/4)*(46/3)*(45/43)*(44/42) which is 1 in 15486.953.

    Now this is the chance for that single case occurring, but there are 15 combinations of matching 4 from 6 [6!/(4!*(6-4)!)], so you divide the answer by 15 to get 1 in 15486.953/15 or 1 in 1032.4.

- 3 Numbers (Constant prize: £25) Follow exactly the same scheme as the 4 match above to get these figures: 1 in (49/6)*(48/5)*(47/4)*(46/43)*(45/42)*(44/41) (which is 1 in 1133.119) for a single case.

    There are 20 combinations of 3 from 6 [6!/(3!*(6-3)!], so the chance of a 3 match is 1 in 1133.119/20 or 1 in 56.7.

- The chance of you winning any of the above prizes is approximately 54 to 1 - it is reckoned an average of one million people per draw will win a prize.

CATEGORY	PRIZES	CHANCES
Jackpot	1	1 in 13,983,816
5+bonus	6	1 in 2,330,636
5-match	252	1 in 55,491.33
4-match	13,545	1 in 1,032.40
3-match	246,820	1 in 56.66
Total	260,624	1 in 53.66

- Using some computer software I wrote, I calculated how many prizes would be won if all combinations of the 13,983,816 tickets were bought:

Needless to say, this exactly tallies with the more theoretical version that I described above.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Escribe tu proceso de aprendizaje y anota tu reflexión respecto al sueño de ganarse la lotería.

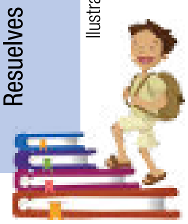
REVISA TU AVANCE

Al finalizar el estudio, te invitamos a revisar el listado de los aprendizajes que obtuviste. Con ello podrás hacer una valoración de tus avances, identificando en el trayecto del tema tus logros. Pide a tu LEC que te apoye en este ejercicio de valoración, así los dos conocerán el avance e identificarán lo que falta por lograr para próximos estudios del tema.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo

INICIAL	BÁSICO			INTERMEDIO				AVANZADO		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Desarrollas tus propias explicaciones y predicciones, al realizar experimentos y cuestionarte respecto a diversos eventos de su entorno. Elaboras patrones, categorías y clasificaciones.	Predices comportamientos y características a partir de regularidades en situaciones familiares y de simulaciones. Comunicas tus opiniones.	Resuelves problemas que impliquen formular hipótesis mediante al análisis de situaciones y simulaciones.	Identificas información en tablas y gráficas de frecuencia y la utilizas para resolver problemas. Comunicas tus observaciones y opiniones.	Identificas las características de los fenómenos aleatorios para interpretar información estadística familiar y resolver problemas. Comunicas tus observaciones y opiniones.	Reconoces que no es posible determinar el resultado de un experimento aleatorio pero que se puede predecir el comportamiento a partir de analizar resultados. Comunicas tus razonamientos.	Construyes el espacio muestral y tablas de frecuencia de eventos aleatorios familiares para resolver problemas.	Graficas resultados de eventos de aleatorios. Usa y comunica argumentos basados en la interpretación de datos.	Resuelves problemas que impliquen comparar cualitativamente la probabilidad de eventos simples. Comunicas tus razones y argumentos.	Resuelves problemas que impliquen aplicar conocimientos de probabilidad para comprender, interpretar y analizar información. Explicas la relación entre probabilidad frecuencial y probabilidad teórica.	Resuelves problemas que impliquen calcular la probabilidad de eventos equiprobables y no equiprobables. Formulas y comunicas argumentos y explicaciones.

Ilustración: © Ivanova Martínez Murillo



PARA SEGUIR APRENDIENDO

Bibliografía sugerida:

Rincón, Luis. *Curso intermedio de probabilidad.* 5-12. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Unam, 2006.

http://lya.fciencias.unam.mx/lars/libros/cip.pdf

Richard K. Lloyd. The Chances of Winning the UK National Lottery. http://lottery.merseyworld.com/Info/Chances.html (Fecha de consulta: 25 de enero de 2016). http://www.eumed.net/cursecon/libreria/drm/0.htm

Esta obra se terminó de imprimir en el mes de julio de 2016,
con un tiraje de 384, 919 ejemplares,
en los Talleres Gráficos de México S.A. de C.V.,
av. Canal del Norte 80, col. Felipe Pescador,
del. Cuauhtémoc, Ciudad de México.